

Пример 1. Оценка параметров статистической выборки.

(Программа 01-statistica.mcd)

Те, кому приходилось выполнять статистические расчеты вручную, наверняка помнят, какой огромный объем рутинных вычислений приходится выполнять в процессе расчетов, особенно при сравнительно больших объемах выборки данных. Данный пример показывает, как легко программируется и рассчитывается очень трудоемкая статистическая задача.

Для заданной выборки данных требуется подобрать закон распределения и определить его параметры.

Для создания выборки данных в примере используется генератор случайных чисел, позволяющий создавать выборку данных, подчиненных заранее заданному закону распределения.

В примере предлагаются три генератора случайных чисел для нормального (**rnorm**), логистического (**rlogis**) и равномерного (**runif**) распределений (рис. 1П.1). Сдвигая вниз один из генераторов, мы тем самым вводим в расчет именно его данные. Далее принятую выборку данных сортируем по росту функцией **sort** для последующего построения графиков и определяем для нее среднее арифметическое (**mean**) и среднее квадратическое (**stdev**) отклонения.

```
ORIGIN := 1          i := 1..n    pi :=  $\frac{1}{n}$ ·i    x := 50..150
```

n - число чисел в выборке данных
(задано глобально около графика)

по очереди сдвиньте вниз одно из выражений X

```
X := rnorm(n,100,30)  X := rlogis(n,100,30)  X := runif(n,50,150)
```

```
X := sort(X)  m := mean(X)  σ := stdev(X)    m = 93.246    σ = 28.1
```

```
pn := pnorm(X,m,σ)  pl := plogis(X,m,σ)  pu := punif(X,50,150)
```

коэффициенты корреляции cor(pp) := cor(pp,p)

```
cor(pn) = 0.982    Поскольку все три кривых вероятности  
cor(pl) = 0.987    близки друг к другу, коэффициенты  
cor(pu) = 0.989    корреляции тоже близки друг к другу и не  
                    являются надежной оценкой.
```

Оценка с помощью взвешенных квадратов отклонений.

$$\Delta 2(pp) := n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - pp_i)^2}{pp_i}$$

взвешенные квадраты отклонений

```
Δ2(pn) = 3.104  Δ2(pl) = 1.699  Δ2(pu) = 7.035
```

Рис. 1П.1. Создание выборки данных, ее параметры и оценка статистических гипотез

Выдвигаем три гипотезы закона распределения и определяем функцию вероятности для них.

Предполагаем, что выборка данных подчиняется:

- ❑ нормальному распределению (функция вероятности **pnorm**);
- ❑ логистическому распределению (функция **plogis**);
- ❑ равномерному распределению (функция **punif**).

На рис. 1П.2 показано графическое сравнение выборки данных x_i и функций вероятности всех трех выбранных законов распределения. Для оценки используется суммарная вероятность p_i , которая равна 1 для полной выборки.

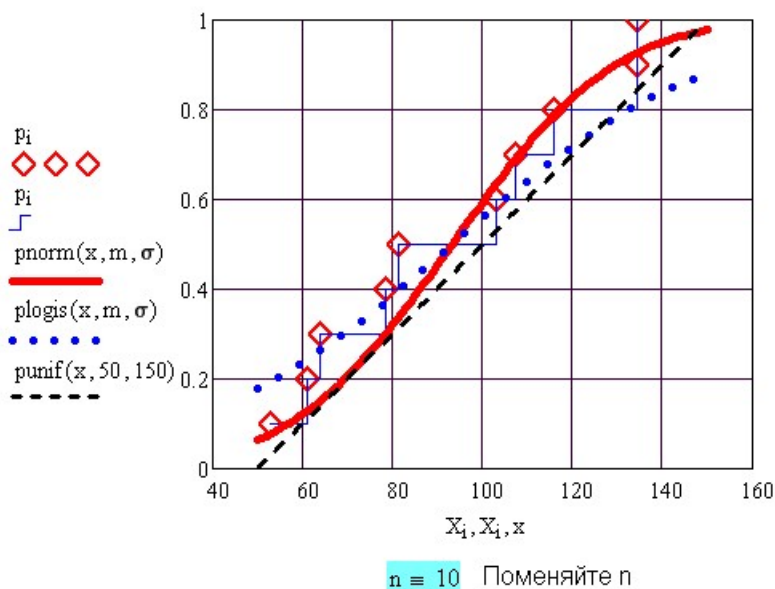


Рис. 1П.2. Графическое сравнение выборки данных и статистических гипотез

Выборка данных, созданная `runif` (генератором случайных чисел равномерного распределения), как и следовало ожидать, располагается ближе всего к прямой штрих-пунктирной линии, соответствующей равномерному распределению. Проверим это наблюдение методами математической статистики.

Сначала посчитаем коэффициенты корреляции функцией `corr` (см. рис. 1П.1). Для равномерного распределения коэффициент корреляции чуть-чуть больше, чем для нормального и логистического распределений. Однако поскольку все три кривых вероятности близки друг к другу, коэффициенты корреляции близки друг к другу и не являются надежной оценкой.

Значительно убедительнее выглядит оценка с помощью взвешенных квадратов отклонений Δ^2 . Для равномерного распределения квадрат отклонений в 6 раз меньше, чем для нормального, и в 2 раза меньше, чем для логистического.

Далее для оценки справедливости той или иной гипотезы используем методы Пирсона и Романовского. Для такой оценки надо выполнить гораздо более сложные расчеты. В этих методах сравниваются не функции вероятности, а плотности вероятности, что требует оценки относительных частот выпадания чисел, то есть построения гистограммы выборки данных.

Для построения гистограммы используем встроенную функцию `histogram`, которая возвращает матрицу из двух столбцов. Первый из них — это значения x середины интервалов, второй — относительные частоты (столбики на рис. 1П.3). На том же рисунке ромбиками и точками показаны значения плотностей вероятности трех распределений, найденных функциями `dnorm`, `dlogis` и `dunif`.

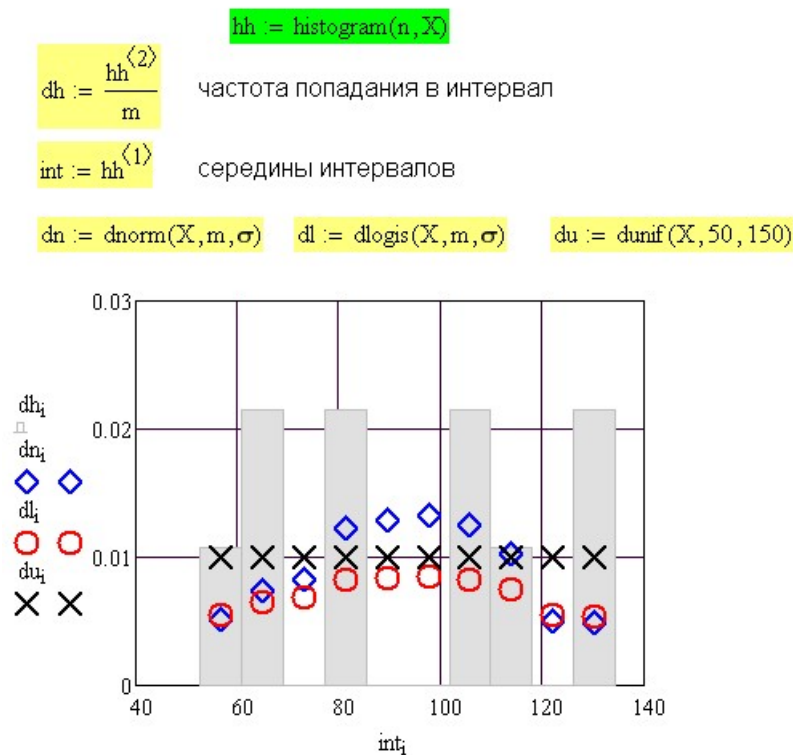


Рис. 1П.3. Гистограмма выборки данных и плотности вероятностей статистических гипотез

Оценка выдвинутых гипотез с помощью критериев Пирсона и Романовского приведена на рис. 1П.4. Маленький объем выборки данных не позволяет оценить правильность выдвинутых гипотез с помощью этих критериев, и их использование служит лишь иллюстрацией возможностей Mathcad.

$$\chi^2(dp) := n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(dh_i - dp_i)^2}{dp_i} \quad \text{критерий Пирсона}$$

$$r := n - 3$$

$$\chi^2(dn) = 1.411 \quad \chi^2(dl) = 1.593 \quad \chi^2(du) = 0.925$$

$$p\chi^2(dp) := \text{pchisq}(\chi^2(dp), r)$$

$$p\chi^2(dn) = 0.01476 \quad p\chi^2(dl) = 0.02109 \quad p\chi^2(du) = 0.00406$$

$$\eta(dp) := \frac{|\chi^2(dp) - r|}{\sqrt{2 \cdot r}} \quad \text{критерий Романовского}$$

$$\eta(dn) = 1.494 \quad \eta(dl) = 1.445 \quad \eta(du) = 1.624$$

Рис. 1П.4. Критерии согласия Пирсона и Романовского

В результате лишь оценка гипотез с помощью взвешенных квадратов отклонений позволяет подтвердить тот очевидный факт, что выборка данных имеет равномерное распределение.

Для оценки параметров выбранного распределения используем метод максимального правдоподобия (рис. 1П.5). Функция правдоподобия представляет собой произведение плотностей вероятности выборки данных по принятому закону распределения. Функция правдоподобия максимальна при верных значениях математического ожидания m и среднего квадратического отклонения σ .

Функция правдоподобия

$$L(X, m, \sigma) := \prod_{i=1}^n \text{dlogis}(X_i, m, \sigma)$$

$$L(X, m, \sigma) := \prod_{i=1}^n \text{dnorm}(X_i, m, \sigma)$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$LL(X, m, \sigma) := \ln(L(X, m, \sigma))$$

начальные приближения

$$m = 93.246 \quad \sigma = 28.378$$

Given

$$\frac{d}{dm} LL(X, m, \sigma) = 0$$

$$\frac{d}{d\sigma} LL(X, m, \sigma) = 0$$

$$A2 := \text{Find}(m, \sigma)$$

$$m1 := A2_1 \quad \sigma1 := A2_2 \quad m1 = 92.798 \quad \sigma1 = 17.478$$

Рис. 1П.5. Оценка параметров выбранного распределения методом максимального правдоподобия

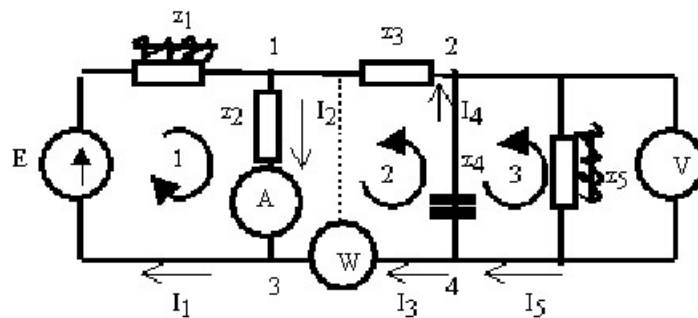
Приравнивая производные от функции правдоподобия к нулю и решая систему уравнений, определяем значения m и σ . Для демонстрации возможностей Mathcad взята логарифмическая функция правдоподобия. Решение исключительно трудоемкой задачи (при выполнении вручную) занимает всего 2–3 строчки в Mathcad.

Этот метод применим только в случае, если плотность распределения имеет экстремум. Он не работает в случае равномерного распределения, и поэтому применен к логистическому и к нормальному распределению. Поменяйте местами функции правдоподобия для этих распределений.

Пример 2. Расчет электрической цепи переменного тока

(Программа 02-electro1.mcd)

В цепи, изображенной на рис. 2П.01, действует источник синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Требуется определить токи и напряжения, действующие на всех участках цепи; проверить баланс мощностей и найти показания приборов.



ORIGIN := 1

$$z_1 := j \cdot 10 \quad z_2 := 30 \quad z_3 := 40 \quad z_4 := -j \cdot 50 \quad z_5 := j \cdot 60$$

$$E_m := 179 \quad \psi := 20 \cdot \frac{\pi}{180} \quad f := 50$$

$$z^T = (10i \ 30 \ 40 \ -50i \ 60i)$$

Рис. 2П.1. Схема электрической цепи и исходные данные для расчета

Определим напряжения и токи в ветвях цепи по уравнениям Кирхгофа. Зададим направления токов в ветвях и обхода контуров. Составляем систему уравнений для комплексов действующих токов и напряжений:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_3 &= 0; \\ -i_3 + i_4 + i_5 &= 0; \\ z_1 i_1 + z_2 i_2 &= E; \\ z_2 i_2 + z_3 i_3 + z_4 i_4 &= E; \\ -z_4 i_4 + z_5 i_5 &= 0 \end{aligned}$$

и записываем ее в матричном виде (рис. 2П.2).

Решая приведенную систему уравнений, определяем токи на участках 1–5. По закону Ома определяем напряжения, $U = Iz$. Для одновременного вычисления попарного произведения элементов векторов используем оператор векторизации.

$$E := \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \psi} \quad E = 118.939 + 43.29i \quad |E| = 126.572$$

Решение матричного уравнения $A \cdot I = B$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & z_3 & z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_4 & z_5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \quad I := A^{-1} \cdot B$$

$$U := (I \cdot z)$$

$$I = \begin{pmatrix} 4.1178 + 0.0542i \\ 3.9827 + 0.0704i \\ -0.1351 + 0.0162i \\ -0.81059 + 0.09724i \\ 0.67549 - 0.08103i \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -0.54202 + 41.17796i \\ 119.4809 + 2.11226i \\ -5.40396 + 0.64826i \\ 4.86194 + 40.5297i \\ 4.86194 + 40.5297i \end{pmatrix}$$

Рис. 2П.2. Определение токов и напряжений в ветвях по уравнениям Кирхгофа

Решим ту же задачу методом эквивалентных преобразований. Найдем эквивалентное сопротивление всей цепи $z_{\text{полное}}$ (рис. 2П.3). Далее по закону Ома определяем напряжение и ток последовательно на каждом участке цепи.

Результаты расчета токов и напряжений в ветвях цепи, полученные двумя методами, полностью совпадают (см. рис. 2П.2 и 2П.3).

На рис. 2П.4 показано определение модуля, аргумента и мгновенного значения токов и напряжений в ветвях цепи.

ВНИМАНИЕ

Во всех операциях с векторами комплексных чисел необходимо использование оператора векторизации.

Расчет полного сопротивления z

$$z_{24} := \frac{z_4 \cdot z_5}{z_4 + z_5} \quad z_{13} := \frac{z_1 \cdot (z_3 + z_{24})}{z_1 + z_3 + z_{24}} \quad z_{\text{полное}} := z_2 + z_{13}$$

Токи I в ветвях и напряжения U

$$\Pi_2 := \frac{E}{z_{\text{полное}}} \quad U_{U_2} := \Pi_2 \cdot z_2 \quad U_{U_1} := \Pi_2 \cdot z_{13} \quad \Pi_1 := \frac{U_{U_1}}{z_1}$$

$$\Pi_3 := \frac{U_{U_1}}{z_3 + z_{24}} \quad U_{U_3} := \Pi_3 \cdot z_3 \quad U_{U_4} := \Pi_3 \cdot z_{24} \quad \Pi_4 := \frac{U_{U_4}}{z_4}$$

$$\Pi_5 := \frac{U_{U_4}}{z_5} \quad U_{U_5} := U_{U_4}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 4.118 + 0.054i \\ 3.983 + 0.07i \\ -0.135 + 0.016i \\ -0.811 + 0.097i \\ 0.675 - 0.081i \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -0.542 + 41.178i \\ 119.481 + 2.112i \\ -5.404 + 0.648i \\ 4.862 + 40.53i \\ 4.862 + 40.53i \end{pmatrix}$$

Рис. 2П.3. Расчет токов и напряжений в ветвях методом эквивалентных преобразований

$$\begin{aligned} \arg(I) \cdot \frac{180}{\pi} = \begin{pmatrix} 0.754 \\ 1.013 \\ 173.159 \\ 173.159 \\ -6.841 \end{pmatrix} & \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} 4.118 \\ 3.983 \\ 0.136 \\ 0.816 \\ 0.68 \end{pmatrix} & \quad I_M := \vec{I} \cdot \sqrt{2} & \quad I_M = \begin{pmatrix} 5.824 \\ 5.633 \\ 0.192 \\ 1.155 \\ 0.962 \end{pmatrix} \\ \arg(U) \cdot \frac{180}{\pi} = \begin{pmatrix} 90.754 \\ 1.013 \\ 173.159 \\ 83.159 \\ 83.159 \end{pmatrix} & \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} 41.182 \\ 119.5 \\ 5.443 \\ 40.82 \\ 40.82 \end{pmatrix} & \quad U_M := \vec{U} \cdot \sqrt{2} & \quad U_M = \begin{pmatrix} 58.239 \\ 168.998 \\ 7.697 \\ 57.729 \\ 57.729 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 2П.4. Аргумент, модуль и мгновенные значения напряжений и токов в ветвях цепи

Проверим баланс активных и реактивных мощностей (рис. 2П.5). Мощность источника тока $S_{\text{источ}}$ должна быть равна суммарной мощности приемников тока $S_{\text{прием}}$

$$\begin{aligned}
I_{\text{источ}} &:= I_2 & S_{\text{источ}} &:= \overline{E I_{\text{источ}}} & S_{\text{источ}} &= 476.74549 + 164.03748i \\
\arg(S_{\text{источ}}) \cdot \frac{180}{\pi} &= 18.987 & |S_{\text{источ}}| &= 504.177 \\
S_{\text{прием}} &:= \sum_{k=1}^5 \left[z_k \cdot (|I_k|)^2 \right] & S_{\text{прием}} &= 476.74549 + 164.03748i \\
\arg(S_{\text{прием}}) \cdot \frac{180}{\pi} &= 18.987 & |S_{\text{прием}}| &= 504.177 \\
R_{\text{источ}} &:= \operatorname{Re}(S_{\text{источ}}) & R_{\text{источ}} &= 476.745 \\
R_{\text{прием}} &:= \operatorname{Re}(S_{\text{прием}}) & R_{\text{прием}} &= 476.745 \\
Q_{\text{источ}} &:= \operatorname{Im}(S_{\text{источ}}) & Q_{\text{источ}} &= 164.037 \\
Q_{\text{прием}} &:= \operatorname{Im}(S_{\text{прием}}) & Q_{\text{прием}} &= 164.037
\end{aligned}$$

Рис. 2П.5. Проверка баланса активных и реактивных мощностей

ПРИМЕЧАНИЕ

Для нахождения произведения комплексно-сопряженных чисел используется особый оператор, вызываемый нажатием клавиши " (кавычки). Для нахождения произведения векторов комплексных чисел используется оператор векторизации.

Далее вычисляем активную мощность P как действительную часть полной мощности S и реактивную мощность Q как мнимую часть полной мощности S . Действующие значения токов и напряжений в ветвях цепи приведены на рис. 2П.6.

$$\begin{aligned}
U_{\text{действ}} &:= \overrightarrow{(|U|)} & U_{\text{действ}} &= \begin{pmatrix} 41.182 \\ 119.5 \\ 5.443 \\ 40.82 \\ 40.82 \end{pmatrix} & I_{\text{действ}} &:= \overrightarrow{(|I|)} & I_{\text{действ}} &= \begin{pmatrix} 4.118 \\ 3.983 \\ 0.136 \\ 0.816 \\ 0.68 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 2П.6. Действующие значения токов и напряжений в ветвях цепи

Расчетные показания приборов, подключенных к цепи, в местах, показанных на схеме цепи (см. рис. 2П.1), приведены на рис. 2П.7.

$$\begin{aligned}
\text{вольтметра} & & U_v &:= |U_5| & U_v &= 40.82 \quad \text{вольт} \\
\text{амперметра} & & I_a &:= |I_2| & I_a &= 3.983 \quad \text{ампер} \\
\text{ваттметра} & & \phi_{13} &:= \arg(I_3) - \arg(U_1) & \phi_{13} \cdot \frac{180}{\pi} &= 82.405 \text{ град} \\
& & P_w &:= I_{\text{действ}3} \cdot U_{\text{действ}1} \cdot \cos(\phi_{13}) & P_w &= 0.741 \text{ ватт}
\end{aligned}$$

Рис. 2П.7. Расчет показаний приборов, включенных в цепь (см. рис. 2П.1)

Пример 4. Переходные процессы при коммутации электрической цепи

(Программа 03-electro.mcd)

Переходные процессы при коммутации электрических цепей описываются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями. Составляется система уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений в цепи после коммутации. К этим уравнениям добавляются уравнения связи. Затем путем подстановки строятся дифференциальные уравнения. В примере рассматривается цепь (рис. 3П.1), содержащая источник тока E , катушку индуктивности L , два сопротивления, R_1 и R_2 , конденсатор C и рубильник.

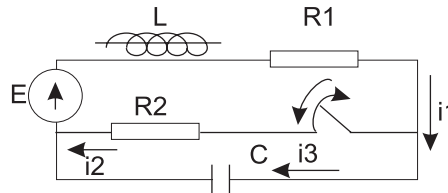


Рис. 3П.1. Схема электрической цепи

Система уравнений для нашей цепи в состоянии после коммутации имеет следующий вид:

□ в разомкнутом состоянии:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_3; \\ i_2 &= 0; \\ E &= L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + U_C; \\ i_3 &= C \frac{dU_C}{dt}; \end{aligned}$$

□ в замкнутом состоянии:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3; \\ E &= L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + R_2 i_2; \\ R_2 i_2 &= 0; \\ i_3 &= C \frac{dU_C}{dt}. \end{aligned}$$

Путем подстановки выражений друг в друга получаем систему двух уравнений первого порядка

□ в разомкнутом состоянии:

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + U_C &= E; \\ C \frac{dU_C}{dt} &= i_1; \end{aligned}$$

□ в замкнутом состоянии:

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + R_2 i_2 &= E; \\ C \frac{dU_C}{dt} &= i_1 - \frac{U_C}{R_2}. \end{aligned}$$

Граничные условия при $t = 0$:

- перед коммутацией — $i_1(0) = 0$, $U_C(0) = E$;
- цепь еще замкнута — $\frac{dU_C}{dt} = 0$, $U_C(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$;
- цепь еще разомкнута — $i_1(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}$, $\frac{dU_C}{dt} = 0$.

Решая приведенные уравнения, можно найти падение напряжения на конденсаторе U_C и токи i_1, i_2, i_3 во всех ветвях электрической цепи.

Для решения дифференциальных уравнений использована функция **Odesolve**.

Напомним, функция **Odesolve** имеет три параметра. В обозначениях примера t — аргумент, по которому дифференцируется функция, t_1 — правая граница интегрирования (левая граница задается в граничных условиях внутри блока **given–Odesolve**), 100 — число шагов интегрирования (необязательный параметр).

При решении наших уравнений необязательный параметр оказался обязательным. Без записи этого параметра **Odesolve** не может решить заданные уравнения.

Установите курсор на имя функции и нажмите правую кнопку мыши. Откроется контекстное меню, в котором можно выбрать способ решения уравнения: **Fixed** (С фиксированным шагом), **Adaptive** (С переменным шагом) или **Stiff** (Как жесткое дифференциальное уравнение).

Смена метода интегрирования иногда позволяет решить уравнение, но не в нашем случае. Mathcad выдает сообщения об ошибке — каждый раз разные, но абсолютно бесполезные, так как это отклик на внутренние процессы, неизвестные пользователю, связанные с алгоритмом решения задачи.

Только при вводе числа шагов интегрирования решение появилось. Введение большого числа шагов часто приводит к верному решению. В нашем случае 10 шагов дают недостаточно точное решение, а 100, 1000 и 10 000 шагов возвращают абсолютно одинаковые верные решения.

На рис. 3П.2 приведено решение дифференциального уравнения второго порядка при размыкании электрической цепи. В верхней части рисунка приведены исходные данные для расчета.

$$R1 := 10 \quad R2 := 20 \quad L := 0.02 \quad C := 50 \cdot 10^{-6} \quad E := 100 \quad t1 := 0.02$$

Размыкание

$$\text{Given} \quad L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} U(t) + R1 \cdot C \cdot \frac{d}{dt} U(t) + U(t) = E$$

$$U'(0) = 0$$

$$U(0) = \frac{R2}{R1 + R2} \cdot E$$

$$U := \text{Odesolve}(t, t1, 100)$$

$$t := 0, \frac{t1}{100} \dots t1$$

$$i(t) := C \cdot \frac{d}{dt} U(t)$$

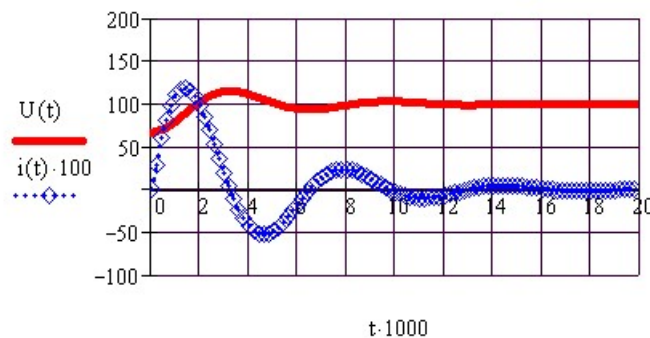


Рис. 3П.2. Напряжение на конденсаторе и ток при размыкании цепи

При разомкнутой цепи токи $i_2 = 0$ и $i_1 = i_3$, поэтому на рис. 3П.2 приведен график лишь одного тока и напряжения на конденсаторе. Как видно из графиков, переходные процессы в цепи затухают примерно через 0,02 с.

На рис. 3П.3 приведено решение системы дифференциальных уравнений при замыкании электрической цепи

Замыкание

Given
$$L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} U(t) + \left(R_1 \cdot C + \frac{L}{R_2} \right) \cdot \frac{d}{dt} U(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \cdot U(t) = E$$

$U'(0) = 0$ $U(0) = E$

$U := \text{Odesolve}(t, t_1, 1000)$ $t := 0, \frac{t_1}{100} \dots t_1$

$i_c(t) := C \cdot \frac{d}{dt} U(t)$ $i_1(t) := i_c(t) + \frac{U(t)}{R_2}$ $i_2(t) := \frac{U(t)}{R_2}$

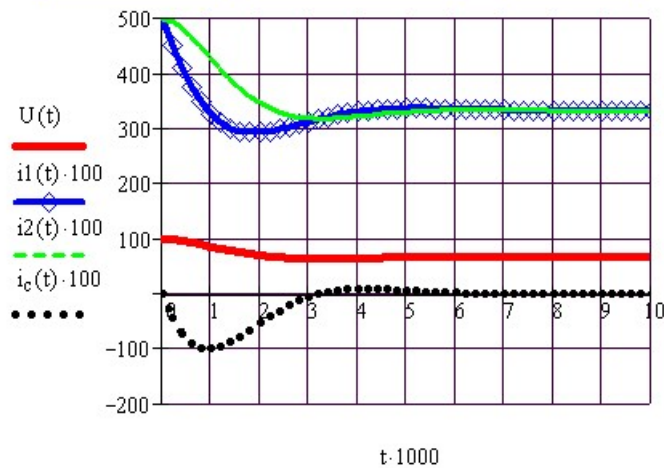


Рис. 3П.3. Напряжение на конденсаторе и токи в ветвях цепи при ее замыкании

Из приведенных ранее четырех исходных уравнений можно составить одно уравнение второго порядка или два уравнения первого порядка. При размыкании цепи решалось одно уравнение второго порядка.

Чтобы продемонстрировать возможности функции **Odesolve**, при замыкании (или размыкании) цепи решается система из двух дифференциальных уравнений (рис. 3П.4).

Размыкание $i_1(0) = \frac{E}{R_2 + R_1}$ $i_1'(0) = 0$ замените любое начальное условие

Given
$$L \cdot i_1'(t) = -R_1 \cdot i_1(t) - U(t) + E$$

$C \cdot U'(t) = i_1(t)$

$U'(0) = 0$ $U(0) = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

$\begin{pmatrix} U \\ i_1 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} U \\ i_1 \end{pmatrix}, t, t_1, 100 \right]$ $i_c(t) := i_1(t)$ $i_2(t) := 0$

Замыкание замените любое граничное условие $i_1'(0) = 0$ $U'(0) = 0$

Given
$$L \cdot i_1'(t) = -R_1 \cdot i_1(t) - U(t) + E$$

$C \cdot U'(t) = i_1(t) - \frac{U(t)}{R_2}$

$i_1(0) = 0$ $U(0) = E$

$\begin{pmatrix} U \\ i_1 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} U \\ i_1 \end{pmatrix}, t, t_1, 100 \right]$ $i_c(t) := C \cdot \frac{d}{dt} U(t)$ $i_2(t) := \frac{U(t)}{R_2}$

Рис. 3П.4. Решение системы дифференциальных уравнений

В качестве параметра функции **Odesolve** вместо одного аргумента вводится вектор из двух аргументов, U и i_1 . В качестве граничных условий можно использовать любые два из четырех начальных условий, $i_1(0) = 0$, $i_1'(0) = 0$, $U_C(0) = 0$ и $U_C'(0) = E$. Поменяйте начальные условия. Результат слегка меняется в первую микросекунду, но в дальнейшем процесс совпадает.

Поскольку при замыкании токи в ветвях различны, на графиках (см. рис. 3П.3) приведены токи во всех трех ветвях. Результаты расчета при решении одного дифференциального уравнения второго порядка и двух уравнений первого порядка совпадают и приведены в электронной книге.

ПРИМЕЧАНИЕ

При решении дифференциальных уравнений в Mathcad 13 – 15 установить курсор на названии функции **Odesolve** и в контекстном меню (при нажатии правой клавиши мыши) выбрать способ решения **fixed** или **adaptive**.

Пример 4. Кинематический анализ кулачкового механизма

(Программа 04-kulachok.mcd)

В качестве примера обработки экспериментальных данных приводится определение угловой скорости и углового ускорения коромысла газораспределительного механизма двигателя внутреннего сгорания. Исходные данные для расчета получены путем эксперимента (иногда их получают снятием координат точек с чертежа после графического построения) и приведены на рис. 4П.1.

Для экономии места в документе векторы из 34 чисел представлены в виде строк, а не столбцов, по 17 чисел в строке. Затем они объединены в единую строку и транспонированы в столбец, так как все функции Mathcad работают только со столбцами чисел, но не со строками.

В этом примере **ORIGIN = 0**.

Угол поворота кулачка ϕ в градусах

```

 $\phi_1 := (0 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20 \ 50 \ 80 \ 100 \ 140 \ 145 \ 150 \ 155 \ 160 \ 165 \ 170 \ 175 \ 180 \ 185)$ 
 $\phi_2 := (190 \ 210 \ 240 \ 270 \ 300 \ 305 \ 310 \ 315 \ 320 \ 325 \ 330 \ 335 \ 340 \ 345 \ 350 \ 355)$ 

```

```

 $\phi_3 := \text{augment}(\phi_1, \phi_2)$ 
 $\phi := \phi_3^T$ 

```

В этом примере **ORIGIN=0**

Угол поворота коромысла ψ в градусах

```

 $\psi_1 := (140 \ 162 \ 165 \ 170 \ 172 \ 171 \ 170 \ 170 \ 170 \ 170 \ 164 \ 146 \ 114 \ 82 \ 62 \ 47 \ 35)$ 
 $\psi_2 := (26 \ 19 \ 14 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 17 \ 22 \ 30 \ 40 \ 54 \ 67 \ 82 \ 96 \ 112 \ 127)$ 

```

```

 $\psi_3 := \text{augment}(\psi_1, \psi_2)$ 
 $\psi := \psi_3^T$ 

```

перевод углов в радианы $\phi := \phi \cdot \frac{\pi}{180}$ $\psi := \psi \cdot \frac{\pi}{180}$

Число замеров 34 $n := 33$ $i := 0..n$

Рис. 4П.1. Исходные данные к расчету

Для определения угловой скорости и углового ускорения массивы исходных данных надо превратить в функции, которые можно дифференцировать.

Вначале аргумент — угол поворота кулачка — превращаем в функцию времени.

Кулачок вращается с постоянной скоростью. Его угловая скорость ω задана в нашем примере глобально около графика, чтобы, изменяя значения ω , наблюдать на графике изменение результатов расчета.

Угол поворота кулачка $\phi = \omega t$. Чтобы построить график для одного полного оборота кулачка, найден период вращения $T = 2\pi/\omega$.

Массив углов поворота коромысла превращается в функцию путем кубической сплайн-интерполяции.

Массив вторых производных функции, используемый при сплайн-интерполяции, можно задать функциями **lspline**, **cspline** и **pspline** (см. главу 7 основной книги) или функциями регрессии **regress** и **loess**. В данном примере функции регрессии присутствуют, но выключены. Чтобы включить их, надо щелкнуть на выражении правой кнопкой мыши и в открывшемся контекстном меню установить флажок **Enable Evaluation** (Разрешить вычисление).

Следует отметить, что функции регрессии предпочтительно использовать для более гладких функций. Для нашей почти ступенчатой функции более близкий к истине результат дают функции интерполяции.

Связь угла поворота кулачка ϕ_1 с угловой скоростью ω

$$\omega := 10 \quad T := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega} \quad T = 0.628 \quad \phi_1(t) := t \cdot \omega$$

$$nn := 50 \quad t := 0, \frac{T}{nn} \dots T$$

Преобразование массива углов поворота коромысла ψ в функцию $\psi_1(t)$

интерполяция
без сглаживания

$$\psi_1(t) := \text{interp}(\text{lspline}(\phi, \psi), \phi, \psi, \phi_1(t))$$

Функции регрессии
отключены

$$\psi_1(t) := \text{interp}(\text{regress}(\phi, \psi, 5), \phi, \psi, \phi_1(t))$$

$$\psi_1(t) := \text{interp}(\text{loess}(\phi, \psi, 0.2), \phi, \psi, \phi_1(t))$$

интерполяция
со сглаживанием
отключена

$$\text{sup} := \text{supsmooth}(\phi, \psi)$$

$$\psi_1(t) := \text{interp}(\text{lspline}(\phi, \text{sup}), \phi, \text{sup}, \phi_1(t))$$

угловая скорость коромысла

$$\omega_{\text{кор}}(t) := \frac{d}{dt} \psi_1(t)$$

угловое ускорение коромысла

$$\varepsilon_{\text{кор}}(t) := \frac{d^2}{dt^2} \psi_1(t)$$

Рис. 4П.2. Определение угловой скорости и углового ускорения коромысла

Полученную тем или иным способом функцию углов поворота коромысла последовательно дифференцируем два раза, определяя угловую скорость и угловое ускорение (рис.4П.2), которые нужны в дальнейшем для определения сил инерции, действующих на механизм.

Результаты расчета с использованием функции интерполяции приведены на рис. 4П.3. График функции интерполяции проходит через все экспериментальные точки (по определению интерполяции). Функции регрессии сглаживают исходные данные и немного искажают заданный график перемещений.

В крайних точках движения коромысла при перемене направления движения ускорение меняет знак (претерпевает разрыв). При увеличении числа точек и, следовательно, уменьшении шага дифференцирования разрыв становится более явным и пики на графике ускорения возрастают.

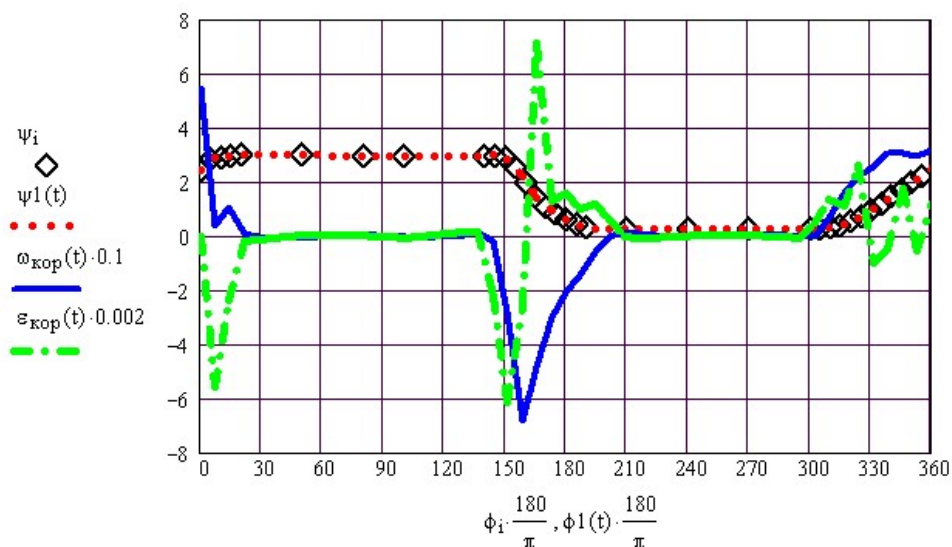


Рис. 4П.3. Результаты расчета с использованием функции интерполяции

Если опытные замеры выполняются с большой погрешностью, то для сглаживания опытных данных можно применить функции сглаживания. На рис. 4П.2 интерполяция со сглаживанием, как и интерполяция с регрессией, отключена. Включите нужное выражение и посмотрите на эффект сглаживания исходных данных.

С той же целью можно использовать разложение функции в ряд Фурье (рис. 4П.4). При этом выбирают лишь гармоники, наиболее сильно влияющие на результат, то есть те, у которых коэффициент больше. На рис. 4П.5 и 4П.6 приведен результат расчета с использованием лишь трех гармоник из 34. У остальных гармоник коэффициент раз в 20 меньше.

Обратите внимание на то, что прямое преобразование Фурье (функция `cfft`) выводит значения в виде комплексных чисел. Чтобы получить коэффициент перед косинусом,

надо найти модуль комплексного числа. Поскольку мы хотим найти модуль для всех чисел вектора ψ , необходимо использовать оператор векторизации с панели матриц. Обратное преобразование Фурье выполняется только для гармоник с коэффициентами k , удовлетворяющими заданному условию (в данном примере $k > 3$).

Функции преобразования Фурье возвращают массив. Чтобы превратить его в функцию, используется интерполяция. Последующее дифференцирование найденной функции позволяет определить угловую скорость и угловое ускорение.

Преобразование Фурье

берем только гармоники, у которых коэффициент $A_j > k$ (поменяйте значение k)

Прямое $A := \text{cfft}(\psi)$

$k := 3$

$j := 0..n$

$AA_j := \begin{cases} A_j & \text{if } |A_j| > k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Обратное $\Psi_{\text{Фурье}} := \text{icfft}(AA)$

$\Psi_{\text{Фурье}} := |\Psi_{\text{Фурье}}|$

$T := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega}$ $T = 0.628$ $\phi_1(t) := t \cdot \omega$ $nn := 50$ $t := 0, \frac{T}{nn} .. T$

Преобразование массива в функцию

$\psi_1(t) := \text{interp}(\text{cspline}(\phi, \Psi_{\text{Фурье}}), \phi, \Psi_{\text{Фурье}}, \phi_1(t))$

угловая скорость коромысла

$$\omega_{\text{кор}}(t) := \frac{d}{dt} \psi_1(t)$$

угловое ускорение коромысла

$$\varepsilon_{\text{кор}}(t) := \frac{d^2}{dt^2} \psi_1(t)$$

Рис. 4П.4. Использование разложения в ряд Фурье для сглаживания опытных данных

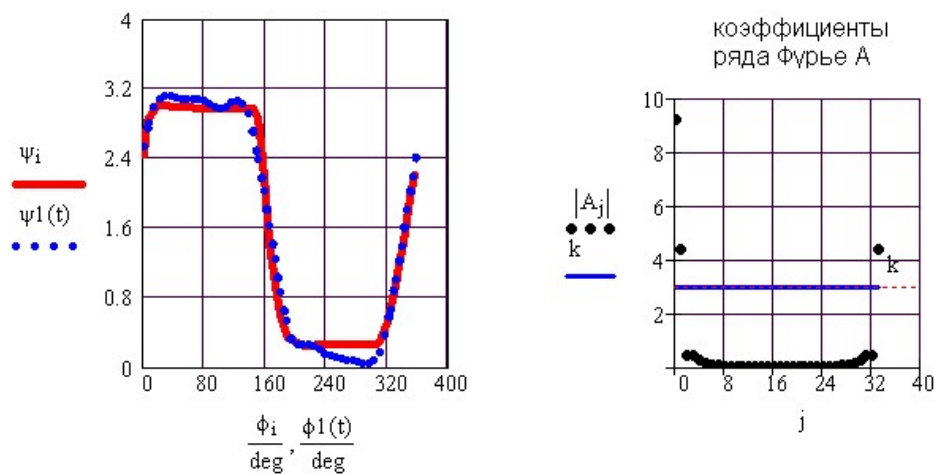


Рис. 5П.5. Выбор коэффициентов ряда Фурье

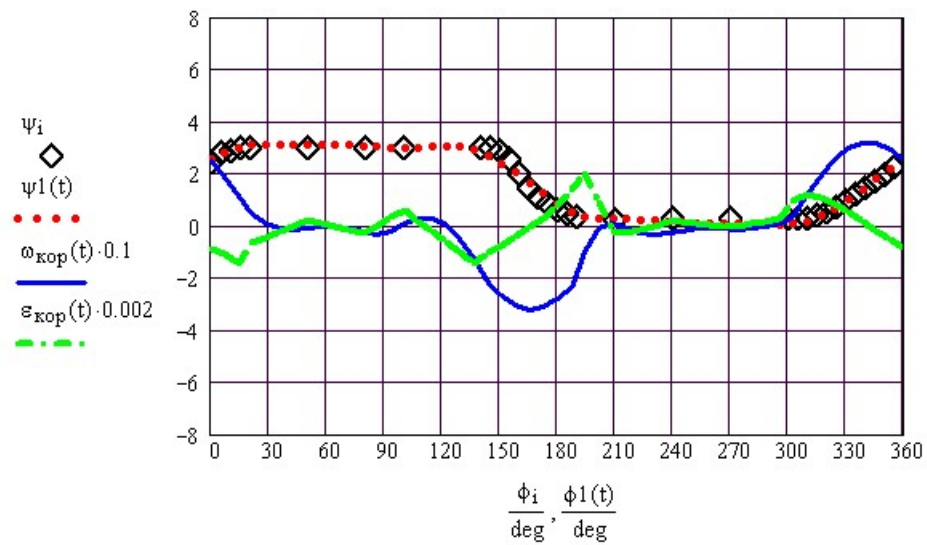


Рис. 4П.6. Результаты расчета с использованием разложения в ряд Фурье

В результате расчета пики ускорений оказались сглаженными, но график перемещения несколько отличается от экспериментального (см. рис. 4П.5), что нежелательно.

Оптимальным методом расчета в данном примере является использование интерполяции со сглаживанием (рис. 4П.2).

Пример 5. Движение двух машин по мосту

16

(Программа 05-most.mcd)

Этот пример не представляет особого интереса с практической точки зрения. На нем я хотел бы продемонстрировать возможности использования в программах блока решения систем уравнений **Given–find** и учет размерностей в программах. Вопросы эти таят в себе много сложностей.

Две машины массой m_1 и m_2 въезжают на мост с разных сторон и в разные моменты времени t со скоростями v_1 и v_2 . Определить прогиб моста под нагрузкой и наибольшие напряжения в балках моста в зависимости от положения машин на мосту. Схема моста под нагрузкой веса машин показана на рис. 5П.1. Опоры могут находиться по краям моста или быть смещены, поэтому, кроме длины моста L , заданы расстояния от края моста до опор L_A и L_B .

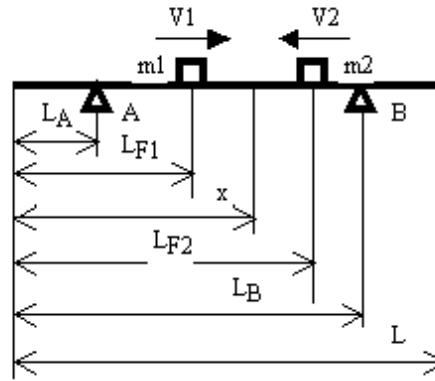


Рис. 5П.1. Схема моста под нагрузкой веса двух машин

В этом примере, чтобы оценить возможности Mathcad, рассмотрим несколько вариантов расчета:

- ☐ с учетом размерностей;
- ☐ без учета размерностей;
- ☐ с использованием панели программирования;
- ☐ без помощи программирования.

Несущая конструкция моста представляет собой две двутавровые балки высотой 20 см, покрытые деревянным настилом. При постоянных, но разных скоростях v движения машин время проезда машин по мосту $T = L/v$, где L — длина моста.

Машины въезжают на мост не одновременно, а со сдвигом по времени ΔT . На мосту находятся вначале одна первая машина, затем две, затем одна вторая и, наконец, нет ни одной машины. Исходные данные для расчета приведены на рис. 5П.2.

$L := 10$ длина моста в метрах
 масса машин в кг скорости движения машин в м/сек
 $m1 := 3 \cdot 10^3$ $m2 := 5 \cdot 10^3$ $V1 := 2$ $V2 := 3$
 $g := 9.81$ $F1 := -m1 \cdot g$ $F2 := -m2 \cdot g$ вес машин
 (Положительная нагрузка - вверх, отрицательная - вниз)
 $L_A := 2$ $L_B := 8$ расстояния до опор моста в метрах
 $\Delta T := 1$ вторая машина въезжает на мост через ΔT секунд после первой поменяйте 8 выделенных исходных данных)
 $KK = 1$ машины едут друг за другом $KK := -1$
 $KK = -1$ машины едут навстречу друг другу
 модуль Юнга, момент инерции и момент сопротивления сечения моста
 $E := 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ $J := 20 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ $W := 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$

Рис. 5П.2. Исходные данные для расчета

При статическом приложении нагрузок расчет моста на прочность и жесткость — задача простая. Главная сложность — найти зависимость точек приложения нагрузок

от времени. Величину нагрузок записываем с помощью оператора условия: машина на мосту — есть нагрузка, съехала с моста — нет нагрузки (рис. 5П.3). На этом же рисунке определяется зависимость точек приложения нагрузок L_F от времени.

время T переезда через мост обеих машин

$$T1 := \frac{L}{V1} \quad T2 := \Delta T + \frac{L}{V2} \quad T := \begin{cases} T1 & \text{if } T1 > T2 \\ T2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad T = 5 \text{ сек}$$

машина на мосту - есть нагрузка, машина съехала с моста - нет нагрузки

$$F1(t) := \begin{cases} F1 & \text{if } 0 \leq t \leq T1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad F2(t) := \begin{cases} F2 & \text{if } \Delta T \leq t \leq T2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

положение машин на мосту в момент времени t

$$L_{F1}(t) := V1 \cdot t \quad L_{F2}(t) := \begin{cases} V2 \cdot (t - \Delta T) & \text{if } KK = 1 \\ L - V2 \cdot (t - \Delta T) & \text{if } KK = -1 \end{cases}$$

Рис. 5П.3. Определение нагрузок F и точек их приложения L_F во времени t

До этого момента (включительно) вид Mathcad-документа не зависит от способа расчета (с использованием панели программирования или без нее, с учетом размерностей или без их учета). В дальнейшем встает задача при заданном значении времени t решить задачу сопротивления материалов: определить внутренние усилия (изгибающий момент и поперечную силу), прогиб балок под нагрузкой веса машин. Вот здесь и начинаются расхождения в расчетах.

5П.1. Расчет с использованием панели программирования, но без учета размерностей

Расчет внутренних усилий и прогиба балок оформлен в виде функций пользователя (рис. 5П.4 и 5П.5). Расчет максимальных напряжений в опасном сечении балок моста оформлен в виде подпрограммы-функции (рис. 5П.6).

Изгибающий момент M и поперечная сила Q

$$M(R_A, R_B, x, t) := \left[R_A \cdot (x - L_A) \cdot (x \geq L_A) + R_B \cdot (x - L_B) \cdot (x \geq L_B) \right] \dots \\ + F1(t) \cdot (x - L_{F1}(t)) \cdot (x \geq L_{F1}(t)) + F2(t) \cdot (x - L_{F2}(t)) \cdot (x \geq L_{F2}(t))$$

$$Q(R_A, R_B, x, t) := \left[R_A \cdot (x \geq L_A) + R_B \cdot (x \geq L_B) \right] \dots \\ + F1(t) \cdot (x \geq L_{F1}(t)) + F2(t) \cdot (x \geq L_{F2}(t))$$

Расчет реакций опор моста

$$R_A := 0 \quad R_B := 0$$

$t := 0$ начальное приближение по времени, без которого не работает вычислительный блок

$$\text{Given} \quad M(R_A, R_B, L, t) = 0 \quad Q(R_A, R_B, L, t) = 0 \\ R(t) := \text{Find}(R_A, R_B) \quad R_A := R(t)_0 \quad R_B := R(t)_1$$

Рис. 5П.4. Определение внутренних усилий в балках моста

Определение прогиба балки методом начальных параметров

(уравнение упругой линии балки под нагрузкой)

$$EJu(R_A, R_B, x, u_0, \theta_0, t) := E \cdot J \cdot u_0 + E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot x + R_A \cdot \frac{(x - L_A)^3}{6} \cdot (x \geq L_A) + R_B \cdot \frac{(x - L_B)^3}{6} \cdot (x \geq L_B) \dots \\ + F1(t) \cdot \frac{(x - L_{F1}(t))^3}{6} \cdot (x \geq L_{F1}(t)) + F2(t) \cdot \frac{(x - L_{F2}(t))^3}{6} \cdot (x \geq L_{F2}(t))$$

определение начальных параметров

$$u_0 := 0 \quad \theta_0 := 0 \quad \text{Given} \quad EJ u(R_A, R_B, L_A, u_0, \theta_0, t) = 0 \quad EJ u(R_A, R_B, L_B, u_0, \theta_0, t) = 0 \\ uu(R_A, R_B, t) := \text{Find}(u_0, \theta_0) \quad uu(R_A, R_B, t) = \begin{pmatrix} -0.008 \\ 0.004 \end{pmatrix}$$

Рис. 5П.5. Определение прогиба балок моста под нагрузкой

Число расчетных точек в программе и шаг расчета (поменяйте их)

$$K := 20 \quad \Delta t := \frac{T}{K} \quad \text{по времени}$$

$$K1 := 10 \quad \Delta x := \frac{L}{K1} \quad \text{по длине моста}$$

Подпрограмма расчета максимальных напряжений в балках моста

```

maxσ(MM) :=
  M1 ← max(MM)
  M2 ← min(MM)
  M_max ← |M1| if |M1| ≥ |M2|
           |M2| otherwise
  xx ← match(M_max, MM)_0 · Δx
  maxσ ←  $\frac{M_{\max}}{W}$ 
  (M_max xx maxσ)T

```

Рис. 5П.6. Расчет максимальных напряжений в балках моста

```

U :=
  for j ∈ 0..K
    t ← Δt · j
    "определение реакций опор"
    RR ← R(t)
    RA ← RR_0
    RB ← RR_1
    for i ∈ 0..K1
      xi ← Δx · i
      "изгибающий момент"
      M1i,j ← M(RA, RB, xi, t)
      "расчет перемещений"
      U ← uu(RA, RB, t)
      u0 ← U_0
      θ0 ← U_1
      ui,j ←  $\frac{EJu(RA, RB, xi, u0, \theta0, t)}{E \cdot J}$ 
      "расчет макс. напряжений"
      xxj ← maxσ(M1(j))_1
      σmaxj ← |maxσ(M1(j))_2|
    (M1 x xx u σmax)T

```

xx - координата x опасного сечения балки

Рис. 5П.7. Головная программа расчета прочности и жесткости балок моста

Последовательность расчетов описана в головной программе (рис. 5П.7).

В результате ее работы формируются массивы выходных данных. Поскольку все величины изменяются по длине балок и по времени, необходимо задать число расчетных точек по длине и по времени (см. рис. 5П.6, *слева*), а в головной программе используется двойной вложенный цикл по длине (по i) и по времени (по j). Для каждого значения времени t определяются значения всех искомых величин по длине балок $0 < x < L$.

В начале головной программы открывается цикл по времени и определяются опорные реакции вызовом подпрограммы $R(t)$.

Внутри программного модуля могут записываться только константы, но не функции, поэтому внутри цикла **for** для каждого значения t константам R_A и R_B присваивается значение функции $R(t)$.

Для каждого значения t внутри вложенного цикла **for** через равные промежутки расстояния Δx определяются значения изгибающего момента M и прогиба балок моста u путем вызова функций $M(R_A, R_B, x_i, t)$ (рис. 6П.4) и $uu(R_A, R_B, t)$, в которых определяются начальные параметры u_0 и θ_0 , и уравнения упругой линии балки (рис. 5П.5). По выходе из вложенного цикла определяются максимальное значение напряжения σ_{\max} и координата xx точки, где оно действует.

По выходе из цикла по времени накопленные за время действия двух циклов результаты расчета записываются в составной массив, из которого в дальнейшем они будут взяты для построения графиков.

Для построения графиков и создания анимации элементы составного массива надо преобразовать в функцию, используя интерполяцию (рис. 5П.8). График результатов расчета при $t = 3$ с показан на рис. 5П.9.

Преобразование массивов в функции

$u(x, k) := \text{interp}[\text{lspline}[U_1, (U_3)^{\langle k \rangle}], U_1, (U_3)^{\langle k \rangle}, x]$ прогиб балок моста

$M(x, k) := \text{interp}[\text{lspline}[U_1, (U_0)^{\langle k \rangle}], U_1, (U_0)^{\langle k \rangle}, x]$ изгибающий момент в балках моста

$\sigma_{\max} := U_4 \quad xx := U_2 \quad x := 0, \frac{L}{100} .. L \quad k := \text{FRAME}$

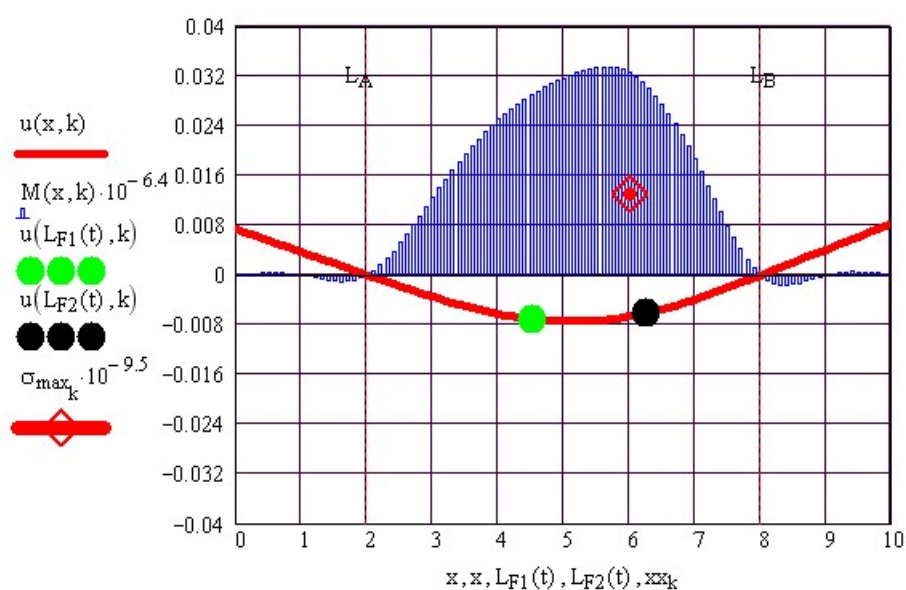
$k := 9$

для создания анимации
отключите выражение k

чтобы посмотреть другие кадры
поменяйте число k

$t := k \cdot \Delta t$

Рис. 5П.8. Подготовка к построению графиков и их анимации



На графиках показаны: перемещение u - красная линия, эпюра изгибающих моментов - синяя гистограмма, положение машин на мосту - зеленая и черная точки, опасное сечение в балках моста и величина напряжений в нем - красный ромб с точкой.

Рис. 5П.9. Результаты расчета в момент времени $t = 3$ сек

5П.2. Расчет с использованием панели программирования и с учетом размерностей

Для учета размерностей в начале расчета вводятся производные размерности. Исходные данные вводятся как произведение чисел на производную размерность. Внутри программного модуля могут использоваться величины с различными размерностями, но составной массив выходных данных должен содержать величины только какой-либо одной размерности. По этой причине в последнем операторе (составном массиве) в подпрограмме определения напряжений σ_{\max} и в головной программе произведено выравнивание размерностей. Сравните последние операторы в программах на рис. 5П.6, 5П.7, 5П.10.

Результаты расчета полностью совпадают с приведенными на рис. 5П.9.

ПРИМЕЧАНИЕ

В Mathcad 12 – 15 программирование с учетом размерностей стало почти невозможно вследствие новых ограничений, наложенных на использование размерностей в расчетах. Этот расчет также не работает.

Не используйте размерности при программировании в Mathcad 13 – 15. Расчет становится чрезвычайно сложным, а часто и вообще невозможным.

20

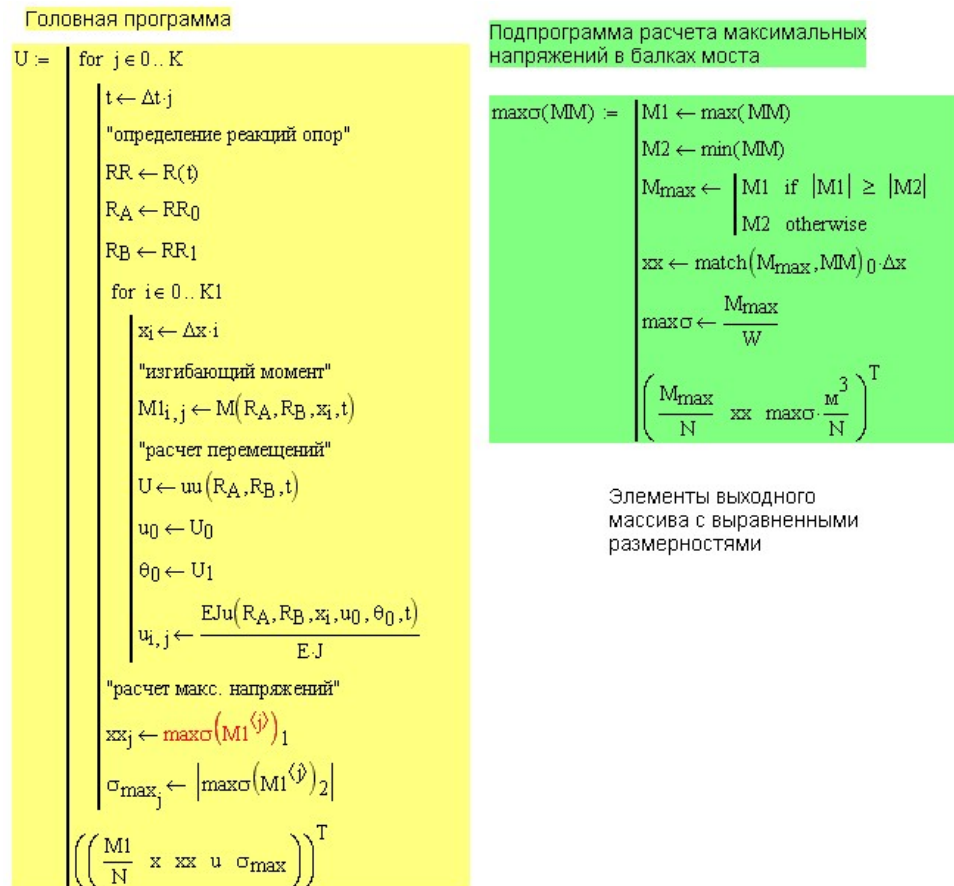


Рис. 5П.10. Головная программа и программа определения максимальных напряжений в балках моста

5П.3. Расчет с учетом размерностей, но без использования панели программирования

ПРИМЕЧАНИЕ

Этот расчет больше похож на "цирковой трюк". Он оригинален, но повторять его в других расчетах нецелесообразно. Рекомендую использовать расчет без учета размерностей, но с использованием панели программирования (по пункту 5П.1).

Без использования программирования невозможно организовать вложенные циклы по времени и по длине балки. Приведенный далее расчет выполнен при постоянном значении времени t .

Роль второго цикла по времени исполняет анимация. Время t выражено через встроенную переменную анимации **FRAME** (Номер кадра). При создании анимации для каждого значения **FRAME** расчет повторяется полностью, начиная с места, где впервые введена эта переменная.

Другого способа заставить Mathcad вернуться к уже сосчитанным выражениям не существуют. Создатели Mathcad, как и создатели всех других языков программирования, видимо, считают дурным тоном использовать возврат на метку, который ранее был во всех языках программирования. Между тем возврат на метку позволил бы в большинстве случаев вообще отказаться от использования панели программирования и сделал бы расчет более простым и удобным.

В этом расчете время через величину **FRAME** приходится задавать почти в начале расчета, перед описанием функций пользователя (рис. 5П.11).

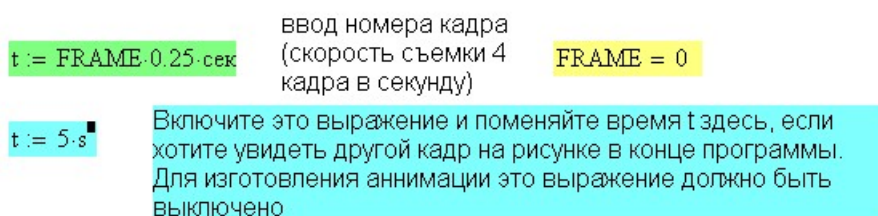


Рис. 5П.11. Ввод текущего значения времени t с использованием параметра **FRAME**

Как результат в процессе анимации реализуются (на экране) вложенные циклы по длине и по времени. Увидеть процесс можно, а вывести в числах массив значений по длине и по времени одновременно невозможно.

Несколько иначе, чем при использовании панели программирования, вводятся функции определения прогиба балок и максимальных напряжений в них (рис. 5П.12).

Определение прогиба балки методом начальных параметров

$$EJu(x, u_0, \theta_0, t) := E \cdot J \cdot u_0 + E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot x + R_A \cdot \frac{(x - L_A)^3}{6} \cdot (x \geq L_A) + R_B \cdot \frac{(x - L_B)^3}{6} \cdot (x \geq L_B) \dots$$

$$+ F1(t) \cdot \frac{(x - L_{F1}(t))^3}{6} \cdot (x \geq L_{F1}(t)) + F2(t) \cdot \frac{(x - L_{F2}(t))^3}{6} \cdot (x \geq L_{F2}(t))$$

$$u_0 := 0 \text{ см} \quad \theta_0 := 0$$

Given

$$EJu(L_A, u_0, \theta_0, t) = 0$$

$$EJu(L_B, u_0, \theta_0, t) = 0$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(u_0, \theta_0)$$

$$u_0 = -0.8 \text{ см}$$

$$\theta_0 = 0.258 \text{ град}$$

$$u(x) := \frac{EJu(x, u_0, \theta_0, t)}{E \cdot J}$$

$$\theta(x) := \frac{d}{dx} u(x)$$

Определение максимальных напряжений в балках моста

$$MM(x) := |M(R_A, R_B, x, t)| \quad \text{Модуль изгибающего момента}$$

$$x := L_A$$

Given

$$0 \cdot m \leq x \leq L$$

$$x_{\max} := \text{Maximize}(MM, x)$$

$$x_{\max} = 2 \text{ м}$$

$$MM(x_{\max}) = 60 \text{ Нм}$$

$$\sigma_{\max}(t) := \frac{MM(x_{\max})}{W}$$

$$\sigma_{\max}(t) = 30 \text{ МПа}$$

$$x := 0 \cdot m, \frac{L}{100} \dots L$$

Рис. 5П.12. Определение прогиба балок и максимальных напряжений в них

Если сравнить уравнения упругой линии балки на рис. 5П.12 и 5П.5, то можно отметить, что на рис. 5П.12 в названии функции отсутствуют параметры R_A и R_B . На этом рисунке реакции опор — константы, они определяются при каждом новом значении времени t в предыдущем выражении. При использовании программирования реакции опор определяются внутри головной программы, и передать их в функцию определения прогиба можно только через параметры. Есть еще возможность в функции прогиба вместо R_A и R_B записать $R(t)_0$ и $R(t)_1$ соответственно, но при этом в 100 раз увеличивается время расчета из-за многократного вызова функции $R(t)$ с ее итерационной процедурой в блоке **Given–find**.

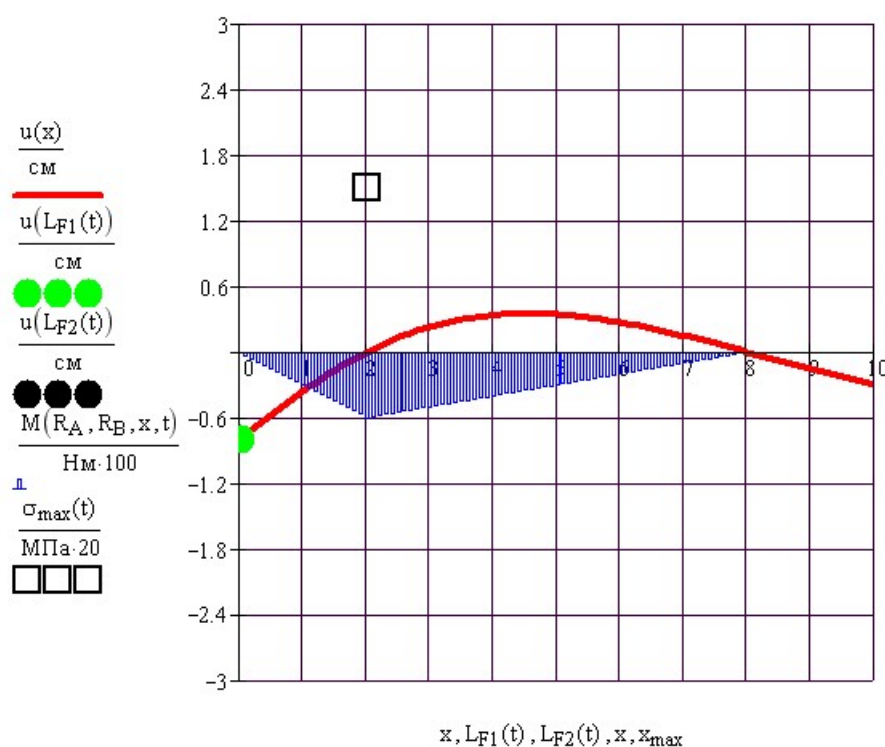


Рис. 5П.13. Результаты расчета при $t = 0$

Результаты расчета приведены на рис. 5П.13.

Подводя итоги, следует сказать, что использовать вычислительный блок [Given–find](#) в программах сложно, но можно. Усложняют расчет и малооправданные ограничения на использование размерностей в расчетах. Эти ограничения вводятся по настоянию специалистов по вычислительной математике, которые, как правило, далеки от практических расчетов. В версиях Mathcad 12 – 15 этих ограничений стало еще больше.

Пример 6. Расчет геометрических характеристик сечения произвольной формы, заданного аналитически.

(Программа 06-Geom1.mcd)

Mathcad позволяет определить геометрические характеристики практически любого сечения. Рассмотрим несколько примеров с различными сечениями.

Рассчитать геометрические характеристики для поперечного сечения, заданного аналитически или в виде семейства точек на контуре.

Пусть задано сечение, ограниченное 4-мя кривыми, заданными уравнениями, приведенными на рис.6П.1 в виде вектора-функции. На этом же рисунке показаны графики этих функций и образуемое ими сечение.

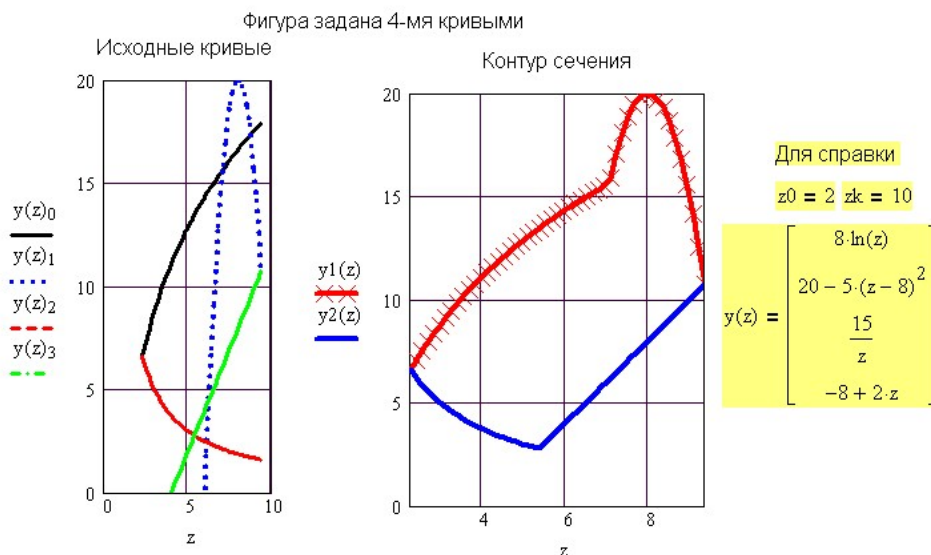


Рис. 6П.1. Поперечное сечение (справа), образованное 4-мя кривыми (слева)

Следует иметь в виду, что Mathcad вычисляет значения функций при значениях аргумента, заданных дискретной переменной и расположенных строго в возрастающем порядке. Обратного хода здесь нет. Поэтому сечение задано двумя кривыми: верхней и нижней.

Каждая кривая составлена из двух частей с помощью условного оператора **if** с панели программирования. Для стыковки частей кривых вначале надо найти точки их пересечения, решив систему двух уравнений с помощью вычислительного блока **given-find**, которому предшествуют начальные значения для всех аргументов (рис. 6П.2). Начальное значение должно быть взято на той же ветви кривой, где находится точка пересечения. Так для четвертой точки пересечения (параболы с прямой) взято значение $z = 10$, чтобы попасть на правую ветвь параболы.

Фигура задана 4-мя кривыми

$$y(z) := \left[8 \cdot \ln(z) \quad 20 - 5 \cdot (z - 8)^2 \quad \frac{15}{z} \quad -8 + 2 \cdot z \right]^T$$

Крайние точки левая $z0 := 2$ правая $zk := 10$

Проверка расчетных формул на примере квадрата
(включите следующие 3 выражения)

$$y(z) := (10 + z \quad 20 - z \quad 10 - z \quad -0 + z)^T \quad z0 := 0 \quad zk := 10$$

Определение координат точек пересечения кривых

$x := 1 \quad z := 1$ начальные приближения

| | | | | |
|-------|--------------|--------------|---|--|
| Given | $x = y(z)_0$ | $x = y(z)_2$ | $\begin{pmatrix} z0 \\ y0 \end{pmatrix} := \text{Find}(z, x)$ | $\begin{pmatrix} z0 \\ y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 6.6 \end{pmatrix}$ |
| Given | $x = y(z)_0$ | $x = y(z)_1$ | $\begin{pmatrix} z1 \\ y1 \end{pmatrix} := \text{Find}(z, x)$ | $\begin{pmatrix} z1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.067 \\ 15.643 \end{pmatrix}$ |
| Given | $x = y(z)_2$ | $x = y(z)_3$ | $\begin{pmatrix} z2 \\ y2 \end{pmatrix} := \text{Find}(z, x)$ | $\begin{pmatrix} z2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.391 \\ 2.782 \end{pmatrix}$ |
| | $z := 10$ | | | |
| Given | $x = y(z)_1$ | $x = y(z)_3$ | $\begin{pmatrix} zk \\ yk \end{pmatrix} := \text{Find}(z, x)$ | $\begin{pmatrix} zk \\ yk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.362 \\ 10.724 \end{pmatrix}$ |

Функции описывающие контур сечения

Верхний контур

$$y1(z) := \begin{cases} y(z)_0 & \text{if } z0 \leq z < z1 \\ y(z)_1 & \text{if } z1 \leq z \leq zk \end{cases}$$

Нижний контур

$$y2(z) := \begin{cases} y(z)_2 & \text{if } z0 \leq z < z2 \\ y(z)_3 & \text{if } z2 \leq z \leq zk \end{cases}$$

Рис. 6П.2. Нахождение точек пересечения четырех кривых, образующих сечение

Далее в программе расчета записаны формулы, соответствующие стандартным определениям площади, статических моментов и моментов инерции в виде двойных интегралов по y и z (рис. 6П.3).

Расчет статических моментов S_z, S_y

моментов инерции J_z, J_y, J_{zy} относительно исходных осей,
а также площади A и координат центра тяжести y_c и z_c .

| | | | |
|---|---------------------|--|-----------------|
| $J_z := \int_{z0}^{zk} \int_{y2(z)}^{y1(z)} y^2 dy dz$ | $J_z = 6823$ | $A := \int_{z0}^{zk} \int_{y2(z)}^{y1(z)} 1 dy dz$ | $A = 57.835$ |
| $J_y := \int_{z0}^{zk} \int_{y2(z)}^{y1(z)} z^2 dy dz$ | $J_y = 2386.055$ | $S_z := \int_{z0}^{zk} \int_{y2(z)}^{y1(z)} y dy dz$ | $S_z = 589.105$ |
| $J_{zy} := \int_{z0}^{zk} \int_{y2(z)}^{y1(z)} z \cdot y dy dz$ | $J_{zy} = 3883.595$ | $S_y := \int_{z0}^{zk} \int_{y2(z)}^{y1(z)} z dy dz$ | $S_y = 358.277$ |
| $y_c := \frac{S_z}{A}$ | $y_c = 10.19$ | $z_c := \frac{S_y}{A}$ | $z_c = 6.19$ |

Рис. 6П.3. Расчет моментов инерции и координат центра тяжести

Далее определено положение центра тяжести сечения. По формулам сопротивления материалов определены моменты инерции относительно центральных осей всего сечения и относительно повернутых осей (рис. 6П.4).

Расчет моментов инерции относительно центральных осей, параллельных исходным

$$J_{ZC} := J_Z - A \cdot y_c^2 \quad J_{ZC} = 822.537$$

$$J_{YC} := J_Y - A \cdot z_c^2 \quad J_{YC} = 166.584$$

$$J_{ZCYC} := J_{ZY} - A \cdot z_c \cdot y_c \quad J_{ZCYC} = 234.185$$

Расчет моментов инерции относительно повернутых центральных осей

$$J_u(\alpha) := J_{ZC} \cdot \cos(\alpha)^2 + J_{YC} \cdot \sin(\alpha)^2 - J_{ZCYC} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

$$J_v(\alpha) := J_{ZC} \cdot \sin(\alpha)^2 + J_{YC} \cdot \cos(\alpha)^2 + J_{ZCYC} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

$$J_{uv}(\alpha) := \frac{J_{ZC} - J_{YC}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + J_{ZCYC} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \quad \alpha := 0, \frac{\pi}{10} \dots 2 \cdot \pi$$

Изменение моментов инерции при повороте осей координат

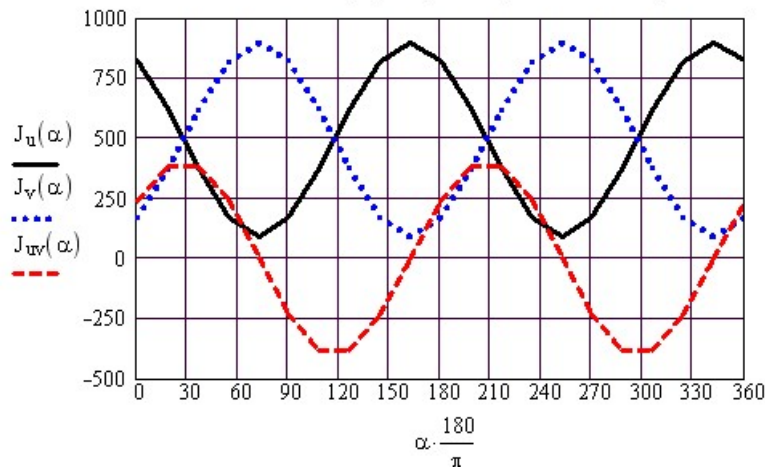


Рис. 6П.4. Моменты инерции сечения относительно параллельно перенесенных и повернутых осей

Положение главных осей

$$\alpha_{\text{глав}} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{-2 \cdot J_{ZCYC}}{J_{ZC} - J_{YC}}\right) \quad \alpha_{\text{глав}} = -17.764 \text{ deg}$$

Главные моменты инерции

$$J_u(\alpha_{\text{глав}}) = 897.563 \quad J_v(\alpha_{\text{глав}}) = 91.558$$

Уравнения главных осей инерции

$$yy1(z) := y_c + \tan(\alpha_{\text{глав}}) \cdot (z - z_c)$$

$$yy2(z) := y_c + \tan\left(\alpha_{\text{глав}} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (z - z_c)$$

Главные центральные оси инерции сечения

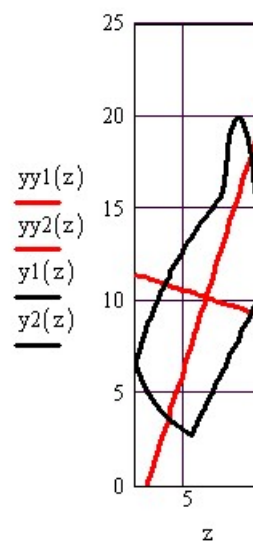


Рис. 6П.5. Определение положения главных осей инерции и величины главных моментов инерции

На рис. 6П.5 найден угол наклона главных центральных осей и соответствующие ему главные центральные моменты инерции. На том же рисунке показано сечение с нанесенными на него главными центральными осями инерции.

Приведенная программа работает для различных сечений, заданных аналитическими выражениями. Работая с программой поменяйте выражения, образующие контур сечения.

Пример 7. Расчет геометрических характеристик сечения, заданного набором точек на контуре

(Программа 07-Geom2.mcd)

Вид поперечного сечения можно задать не только аналитически, но и рядом точек, лежащих на контуре сечения.

На рисунке 7.1 показан массив точек контура некоторого сечения. Напоминаю, что Mathcad для последующей интерполяции функций требует, чтобы значения аргумента были заданы обязательно в возрастающем порядке. Не может быть обратного движения кривой, поэтому сечение задано двумя массивами точек: для верхней и для нижней частей контура отдельно. Для экономии места на рисунке массивы введены в виде строки с транспонированием в столбец.

Верхняя линия

$$Z1 := (2 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9)^T$$

$$Y1 := (3 \ 9 \ 11 \ 9 \ 2)^T$$

Нижняя линия

$$Z2 := (2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9)^T$$

$$Y2 := (3 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2)^T$$

$$m := \text{rows}(Z1) - 1 \quad z0 := Z1_0 \quad zk := Z1_m \quad z := z0, z0 + \frac{zk - z0}{50} \dots zk$$

аппроксимация плавной кривой

$$y1(z) := \text{interp}(\text{lspline}(Z1, Y1), Z1, Y1, z)$$

$$y2(z) := \text{interp}(\text{lspline}(Z2, Y2), Z2, Y2, z)$$

аппроксимация отрезками прямых линий

$$yy1(z) := \text{linterp}(Z1, Y1, z)$$

$$yy2(z) := \text{linterp}(Z2, Y2, z)$$

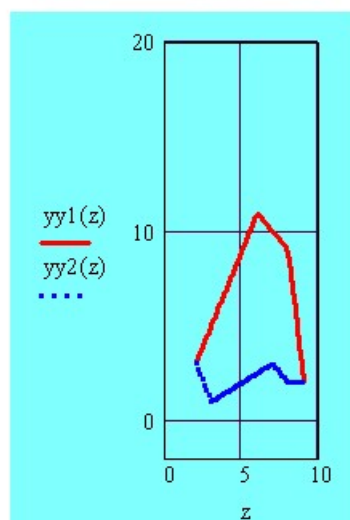
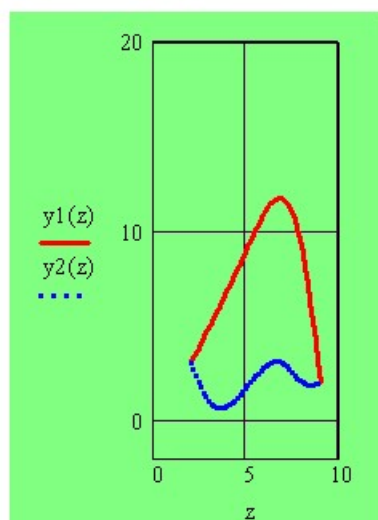


Рис. 7.1. Задание сечения массивом точек

Для вычисления интегралов массивы надо превратить в функции путем их интерполяции функцией **interp**. В зависимости от способа интерполяции вид сечения будет немного изменяться. Можно описать сечения плавной кривой, используя одну из трех функций кубической сплайн-интерполяции, можно соединить точки отрезками прямых линий используя линейную интерполяцию. Вид получаемых сечений показан на рис. 2.6.

При работе с программой включите указанные в программе выражения для аппроксимации сечения плавной кривой или ломанной линией. Для включения выражений в контекстном меню выберите **Properties ▶ Calculation** (Свойства ▶ Вычисления), снимите флажок у пункта **Disable Evaluation** (Оценка не нужна).

После этого весь пример будет пересчитан для выбранного вами варианта. Если вам надо определить геометрические характеристики сечения с вырезом произвольной формы, то аналогичный расчет надо сделать для выреза. Скопируйте программу и вставьте в конец ее самой. Первая часть послужит для расчета основного сечения, вторая часть для выреза.

ВНИМАНИЕ

При расчете площадь выреза и момент инерции выреза берутся с минусом.

Поскольку массивы точек преобразованы в функции, то последующий расчет геометрических характеристик сечения полностью повторяет расчет, приведенный в предыдущей задаче (для сечения, заданного аналитически), и показанный на рис. 6П.3 – 6П.5.

Пример 8. Расчет геометрических характеристик составного сечения,

(Программа 08-Geom3.mcd)

Рассчитать геометрические характеристики составного сечения (рис. 8П.1).

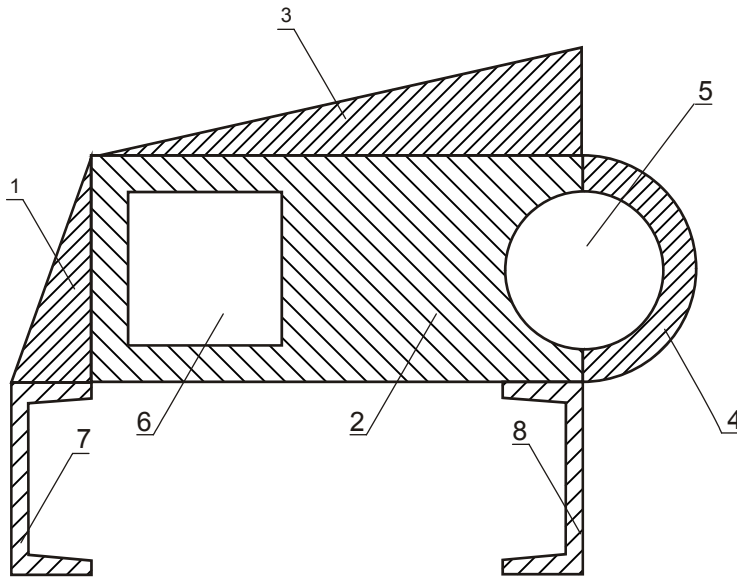


Рис. 8П.1. Составное поперечное сечение

Заданное сечение разбито на 7 элементов. Для каждого элемента ввести ширину элемента b , высоту сечения h , площадь элемента A , координаты центра тяжести Y и Z в виде элементов вектора для выполнения последующих однотипных операций (рис. 8П.2). Ввести код элемента K и признак наличия выреза $K1$. Расшифровка кодов приведена на рис. 8П.3.

```

b := (5 15 15 7.5 5 3 0 0)T
h := (10 10 5 7.5 5 3 0 0)T
A := (25 75 37.5 88.4 39.3 36 13.3 13.3)T
координаты центра тяжести элементов
Y := (3.33 5 11.67 7.5 7.5 5 -6 -6)T
Z := (-1.67 7.5 10 18.18 15 5 -3.66 13.46)T
код элементов K := (3 1 3 5 2 1 7 7)T
K1 = 1 сечение сплошное K1 = -1 отверстие
K1 := (1 1 1 1 -1 -1 1 1)T n := rows(A)
i := 1..n

```

Рис. 8П.2. Исходные данные к расчету составного сечения

| | |
|-------|---|
| K = 1 | прямоугольник |
| K = 2 | круг |
| K = 3 | треугольник J _{zy} >0 |
| K = 4 | треугольник J _{zy} <0 |
| K = 5 | полукруг, где d=b - вертикальный размер |
| K = 6 | полукруг, где d=b - горизонтальный размер |
| K = 7 | швеллер |

Рис. 8П.3. Коды элементов составного поперечного сечения

Далее в программе происходит расчет моментов инерции элементов относительно собственных центральных осей, оформленный в виде подпрограммы (рис.8П.4). В зависимости от кода K для каждого элемента введена своя расчетная формула.

Затем следует перечень расчетных формул и вывод результатов расчета (рис. 8П.5).

29

- Определение положения центра тяжести сечения.
- Определение моментов инерции относительно центральных осей, параллельных исходным осям.
- Определение угла наклона главных осей относительно исходных.
- Определение главных центральных моментов инерции.

| | | |
|---|--|---|
| $J_{z_i} := \begin{cases} \frac{b_i \cdot (h_i)^3}{12} & \text{if } K_i = 1 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{64} & \text{if } K_i = 2 \\ \frac{b_i \cdot (h_i)^3}{36} & \text{if } 3 \leq K_i \leq 4 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{128} & \text{if } K_i = 5 \\ \left[0.00686 \cdot (b_i)^4 \right] & \text{if } K_i = 6 \\ 304 & \text{if } K_i = 7 \\ 0 & \text{if } K_i > 7 \end{cases}$ | $J_{y_i} := \begin{cases} \frac{(b_i)^3 \cdot h_i}{12} & \text{if } K_i = 1 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{64} & \text{if } K_i = 2 \\ \frac{(b_i)^3 \cdot h_i}{36} & \text{if } 3 \leq K_i \leq 4 \\ \left[0.00686 \cdot (b_i)^4 \right] & \text{if } K_i = 5 \\ \frac{\pi \cdot (b_i)^4}{128} & \text{if } K_i = 6 \\ 31.2 & \text{if } K_i = 7 \\ 0 & \text{if } K_i > 7 \end{cases}$ | $J_{zy_i} := \begin{cases} \frac{(b_i)^2 \cdot (h_i)^2}{72} & \text{if } K_i = 3 \\ \frac{(b_i)^2 \cdot (h_i)^2}{-72} & \text{if } K_i = 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ |
|---|--|---|

Рис. 8П.4. Моменты инерции элементов составного сечения

Координаты центра тяжести сечения

| | | |
|--|--|-------------------------------|
| $Y_c := \frac{\sum_{j=1}^n A_j \cdot Y_j \cdot K1_j}{\sum_{j=1}^n A_j \cdot K1_j}$ | $Z_c := \frac{\sum_{j=1}^n A_j \cdot Z_j \cdot K1_j}{\sum_{j=1}^n A_j \cdot K1_j}$ | $Y_c = 5.22$ $Z_c = 10.52$ |
|--|--|-------------------------------|

Моменты инерции относительно центральных осей всего сечения

| | |
|--|------------------|
| $J_{z0} := \sum_{j=1}^n \left[J_{z_j} + A_j \cdot (Y_j - Y_c)^2 \right] \cdot K1_j$ | $J_{z0} = 7344$ |
| $J_{y0} := \sum_{j=1}^n \left[J_{y_j} + A_j \cdot (Z_j - Z_c)^2 \right] \cdot K1_j$ | $J_{y0} = 13862$ |
| $J_{zy0} := \sum_{j=1}^n \left[J_{zy_j} + A_j \cdot (Y_j - Y_c) \cdot (Z_j - Z_c) \right] \cdot K1_j$ | $J_{zy0} = 3389$ |

Угол наклона главных осей инерции

| | |
|---|---|
| $\alpha_{\text{глав}} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left(\frac{-2 \cdot J_{zy0}}{J_{z0} - J_{y0}} \right)$ | $\alpha_{\text{глав}} = 23 \text{ deg}$ |
|---|---|

Главные центральные моменты инерции

| | |
|--|--------------------|
| $J_{\max} := \frac{J_{z0} + J_{y0}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{z0} - J_{y0})^2 + 4 \cdot J_{zy0}^2}$ | $J_{\max} = 15305$ |
| $J_{\min} := \frac{J_{z0} + J_{y0}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{z0} - J_{y0})^2 + 4 \cdot J_{zy0}^2}$ | $J_{\min} = 5902$ |

Рис. 8П.5. Расчет геометрических характеристик составного сечения

С помощью приведенной программы можно рассчитывать различные сечения. Введите свои исходные данные и посмотрите результаты расчета. Если ваше сечение содержит элементы, которых нет среди указанных семи типов, например, сектор, сегмент, двутавр, уголок, введите формулы для них в выражения-подпрограммы для моментов инерции.

Пример 9. Определение внутренних усилий при растяжении-сжатии

(Программа 09-vnutr1.mcd)

При растяжении-сжатии все силы направлены вдоль оси стержня. В поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие: продольное. Возможно действие сосредоточенных и распределенных нагрузок

Правило

продольное усилие равняется сумме сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Положительным считается растягивающее усилие, отрицательным — сжимающее.

Математически это правило можно записать следующим образом:

$$N(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx \quad (9.1).$$

Распределенная нагрузка q может быть переменной или постоянной.

Если распределенная нагрузка постоянной интенсивности приложена лишь к части стержня, то ее можно заменить двумя нагрузками: распределенной нагрузкой, приложенной от сечения $x = L_{qn}$ до конца стержня, и фиктивной распределенной нагрузкой той же величины, но противоположного направления, приложенной от сечения $x = L_{qk}$ до конца стержня (формула 9.2). В этом случае выражение (9.1) можно записать в виде

$$N(x) = \sum F_i + \sum q_i(x) \cdot (x - L_{qn}) - \sum q_i(x) \cdot (x - L_{qk}) \quad (9.2),$$

где L_{qn} и L_{qk} — расстояние от начала координат соответственно до начала и до конца распределенной нагрузки.

Для записи внутренних усилий в общем виде удобно использовать булевы операторы условия.

Булевы операторы принимают значения 1, если логическое выражение в скобках верно, и 0, если — не верно.

Умножение какого-либо слагаемого на булев оператор условия позволяет включить это слагаемое, если условие выполняется, или исключить его, если условие не выполняется.

С использованием булевых операторов можно выстраивать довольно сложные математические выражения. Например, одновременное действие нескольких условий (...и, ...и, ...и, ...) записываем в виде произведения нескольких булевых операторов. Если хоть одно условие неверно, выражение обращается в нуль $(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1) = 0$.

Если достаточно выполнения хотя бы одного условия (...или, ...или, ...или, ...), записываем сумму булевых операторов $(0 + 0 + 0 + 1 + 0) = 1$ и будем **неправы**. Представьте, что одновременно выполняются два условия, тогда результат равен 2, а это повлечет за собой умножение на 2 предшествующего условию математического выражения и результат станет неверным.

Совет

Во избежании ошибок не надо строить математические выражения с использованием обычных знаков умножения и сложения. Надо использовать знаки логических операций с панели Boolean (Булевы операторы): \wedge — и...и, \vee — или.

Расчет продольного усилия в Mathcad для стержня, условно показанного на рис. 9П.1, приведен на рис. 9П.3, результаты расчета на рис. 9П.4. Условность схемы состоит в том, что на рис. 9П.1 стержень нагружен одной сосредоточенной и одной распределенной нагрузкой, тогда как в примере на стержень действуют 3 сосредоточенных и 2 распределенных нагрузки. Сделано это, чтобы не загромождать рисунок большим количеством стрелок и обозначений. В принципе, количество нагрузок может быть любым.

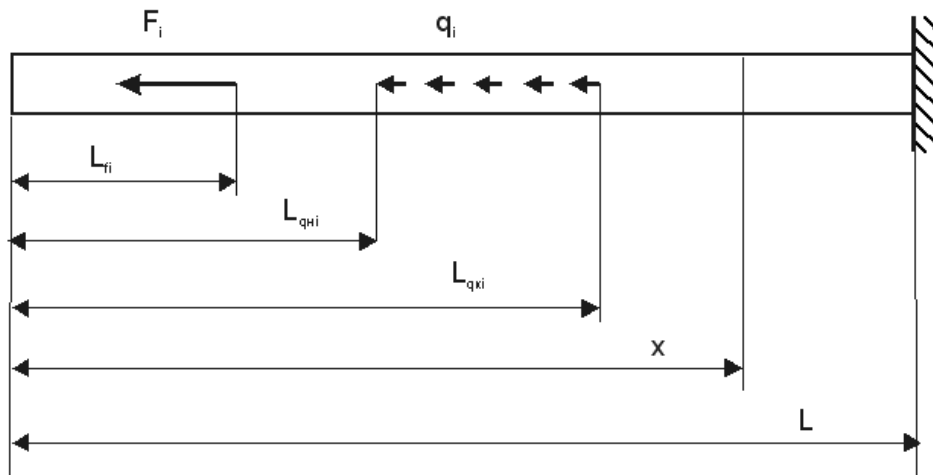


Рис. 9П.1. Условная схема нагружения стержня при растяжении-сжатии

Как видно из графиков (рис. 9П.4) при постоянной интенсивности распределенной нагрузки формулы (9.1) и (9.2) дают абсолютно одинаковые результаты. Чтобы посмотреть эффект влияния переменной распределенной нагрузки, включите в расчет выражение для $qq(x)$ на рисунке 9П.3, справа. В этом выражении вводятся две треугольные распределенные нагрузки. Первая из них возрастает по линейному закону, вторая убывает по линейному закону.

Записанные в Mathcad выражения для продольных усилий являются функциями, которые можно интегрировать и дифференцировать.

Формулы, приведенные в этом расчете, справедливы для любой схемы нагружения стержня. Поскольку в примере на стержень действуют 3 сосредоточенные и 2 распределенные нагрузки, приложенные в разных сечениях, в формулы (9.1) и (9.2) включены булевы операторы условия, включающие при соответствующих значениях x слагаемые для отдельных нагрузок. Работая с примером, поменяйте величины и количество нагрузок, места их приложения.

Расчет внутренних усилий в этой главе производится с учетом размерностей, поэтому в начале расчета вводятся производные размерности на русском языке, а затем исходные данные для расчета (рис.9П.2).

$$m := m \quad cm := 0.01 \cdot m \quad mm := 0.001 \cdot m \quad kH := 1000 \cdot N$$

Исходные данные

$$F := \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot kH \quad L_F := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot cm \quad q := \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{kH}{m} \quad L_{qH} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot cm \quad L_{qK} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot cm$$

$$L := 1 \cdot m \quad x := 0 \cdot m, \frac{L}{100} \dots L$$

Рис. 9П.2 Исходные данные для расчета

Математически продольное усилие можно записать следующим образом

$$N(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx$$

Для использования этого выражения надо записать функцию изменения интенсивности распределенной нагрузки по длине стержня

q = Const

$$qq(x) := \begin{cases} q_1 & \text{if } L_{qH_1} \leq x \leq L_{qK_1} \\ q_2 & \text{if } L_{qH_2} \leq x \leq L_{qK_2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Продольное усилие

$$N(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \int_0^x qq(x) dx$$

q - переменная

включите это выражение

$$qq(x) := \begin{cases} 4 \cdot q_1 \cdot \frac{x - L_{qH_1}}{L - L_{qH_1}} & \text{if } L_{qH_1} \leq x \leq L_{qK_1} \\ \left[q_2 \cdot \left(1 - \frac{x - L_{qH_2}}{L - L_{qH_2}} \right) \right] & \text{if } L_{qH_2} \leq x \leq L_{qK_2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

постоянная распределенная нагрузка как сумма двух нагрузок противоположного направления

Включите эти выражения. Результат не изменится, но расчет пойдет быстрее

$n := \text{rows}(F)$ $m := \text{rows}(q)$

$$N(x) := \sum_{i=1}^n F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \sum_{i=1}^m q_i \cdot (x - L_{qH_i}) \cdot (x > L_{qH_i}) + \sum_{i=1}^m -q_i \cdot (x - L_{qK_i}) \cdot (x > L_{qK_i})$$

Рис. 9П.3 Расчет продольных усилий при растяжении

Особенностями работы в Mathcad, обеспечивающими простоту решения и его универсальность, являются:

- ❑ выбор общего начала координат для задания всех расстояний, позволяющий построить эпюры внутренних усилий;
- ❑ запись всех нагрузок и расстояний до них в векторной форме, позволяющий использовать оператор суммирования по заданному индексу;
- ❑ использование булевых операторов условия, обеспечивающих включение слагаемых при $x >$ расстояния от начала координат до соответствующей нагрузки.

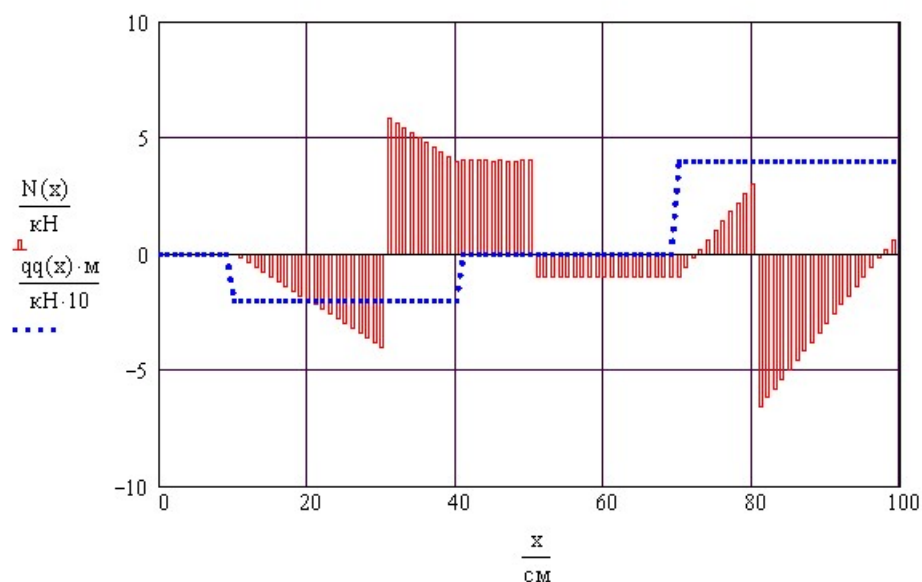


Рис. 9П.4 Результаты расчета продольных усилий

Примечание

Для сопоставимости графиков на одном рисунке здесь и в дальнейшем используются различные масштабные коэффициенты для разных функций.

Пример 10. Определение внутренних усилий при кручении стержня

(Программа 10-vnutr2.mcd)

Кручение стержня вызывается парами сил, плоскость действия которых перпендикулярна продольной оси стержня. В этом случае в поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие — крутящий момент M_k .

Внешними нагрузками при кручении могут быть сосредоточенные моменты M и распределенные моменты m .

Применительно к кручению правило определения внутренних усилий выглядит так:

ПРАВИЛО

Крутящий момент равен сумме моментов пар сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Правило знаков крутящего момента, в принципе безразлично, так как прочность при кручении не зависит от направления вращения. Важно лишь не спутать сумму или разность чисел. Тем не менее, для упорядочения расчетов рекомендуется принять крутящий момент положительный, если, глядя с торца стержня, видим внешний момент, действующим против часовой стрелки.

Математически крутящий момент можно записать так

$$M_k(x) = \sum M_i + \sum \int m_i(x) \cdot dx \quad (10.1).$$

В реальных конструкциях нет сил и моментов, действующих в точке. Каждая сила действует на каком-то участке тела, как правило, малом по сравнению с размерами тела и, поэтому в расчетах заменяется сосредоточенной силой или парой сил, действующей в точке. При кручении распределенные моменты используются в расчетах крайне редко.

Теоретически распределенные моменты могут быть постоянной или переменной интенсивности. Для примера используем распределенные моменты постоянной интенсивности. При постоянной распределенной нагрузке m выражение (10.1) принимает вид

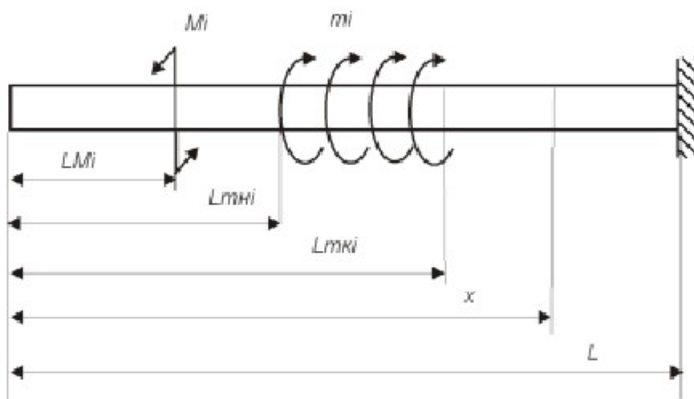
$$M_k(x) = \sum M_i + \sum m_i(x) \cdot (x - L_{mn}) - \sum m_i(x) \cdot (x - L_{mk}) \quad (10.2),$$

где L_{mn} и L_{mk} — расстояние от начала координат соответственно до начала и до конца распределенной нагрузки.

Расчет в Mathcad крутящих моментов для стержня, условно показанного на рис. 10П.1, приведен на рис. 10П.2. Результаты расчета приведены на рис. 10П.3.

$$m := m \quad cm := 0.01 \cdot m \quad mm := 0.001 \cdot m \quad kNm := 1000 \cdot N \cdot m \quad Nm := N \cdot m$$

Условная схема нагружения стержня



Исходные данные

$$M := \begin{pmatrix} 500 \\ -600 \end{pmatrix} \cdot Nm \quad L_M := \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot cm \quad m := \begin{pmatrix} -1000 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \frac{Nm}{m}$$

$$L_{mn} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot cm \quad L_{mk} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot cm \quad L := 1 \cdot m$$

Рис. 10П.1. Условная схема нагружения стержня при кручении

Математически крутящий момент можно записать следующим образом

$$M_k(x) = \sum M_i + \int m_i(x) \cdot dx$$

Для использования этого выражения надо записать функцию изменения интенсивности распределенной нагрузки по длине стержня

m = Const

$$mm(x) := \begin{cases} m_1 & \text{if } L_{mn1} \leq x \leq L_{mk1} \\ m_2 & \text{if } L_{mn2} \leq x \leq L_{mk2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Крутящий момент

$$M_k(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i \cdot (x > L_{M_i}) + \int_0^x mm(x) dx$$

m - переменная

включите это выражение

$$mm(x) := \begin{cases} 4 \cdot m_1 \cdot \frac{x - L_{mn1}}{L - L_{mn1}} & \text{if } L_{mn1} \leq x \leq L_{mk1} \\ m_2 \cdot \left(1 - \frac{x - L_{mn2}}{L - L_{mn2}} \right) & \text{if } L_{mn2} \leq x \leq L_{mk2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x := 0 \cdot m, \frac{L}{100} \dots L$$

постоянная распределенная нагрузка как сумма двух нагрузок противоположного направления

Включите это выражение. Результат не изменится, но расчет пойдет быстрее

$$M_k(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i \cdot (x > L_{M_i}) + \left[\sum_{i=1}^{\text{rows}(m)} m_i \cdot (x - L_{mn_i}) \cdot (x > L_{mn_i}) - \sum_{i=1}^{\text{rows}(m)} m_i \cdot (x - L_{mk_i}) \cdot (x > L_{mk_i}) \right]$$

Рис. 10П.2 Расчет крутящих моментов при кручении стержня

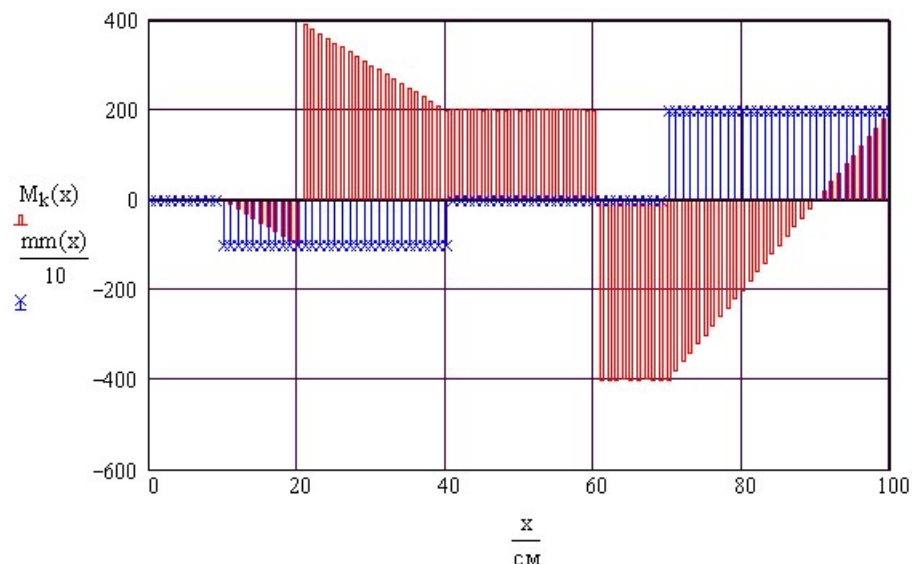


Рис. 10П.3 Результаты расчета крутящих моментов при кручении стержня

При постоянной интенсивности распределенной нагрузки формулы (10.1) и (10.2) дают абсолютно одинаковые результаты. Чтобы посмотреть эффект влияния переменной распределенной нагрузки, включите в расчет выражение для $mm(x)$ на рисунке 10П.2, справа. В этом выражении вводятся две треугольные распределенные нагрузки. Первая из них возрастает по линейному закону, вторая убывает по линейному закону.

Записанные в Mathcad выражения для крутящих моментов являются функциями, которые можно интегрировать и дифференцировать.

Формулы, приведенные в этом расчете, справедливы для любой схемы нагружения стержня при кручении. Поскольку в примере на стержень действуют 2 сосредоточенные и 2 распределенные нагрузки, приложенные в разных сечениях, в формулах крутящих моментов используются булевы операторы условия, включающие при соответствующих значениях x слагаемые для отдельных нагрузок. Работая с примером, поменяйте величины и количество нагрузок, места их приложения.

Расчет внутренних усилий в этой главе производится с учетом размерностей, поэтому в начале расчета вводятся производные размерности на русском языке, а затем исходные данные для расчета (рис. 10П.1).

Пример 11. Определение внутренних усилий при изгибе консольной балки

(Программа 11-vnutr3.mcd)

Рассмотрим плоский поперечный изгиб, при котором все силы лежат в одной плоскости и перпендикулярны продольной оси балки. В этом случае в поперечных сечениях действуют поперечная сила Q и изгибающий момент M . Продольное усилие $N = 0$. Возможно действие сосредоточенных и распределенных нагрузок. При плоском поперечном изгибе:

ПРАВИЛО

поперечная сила равняется сумме сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения;

изгибающий момент равен сумме моментов всех сил расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения относительно центра тяжести сечения

Математически внутренние усилия при изгибе можно записать следующим образом:

$$Q(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx$$

$$M_z(x) = \sum M_i + \sum \int F_i \cdot h(x) + \sum \int q_i(x) \cdot h(x) \cdot dx \quad (11.1),$$

где $h(x)$ — плечо силы.

На практике распределенная нагрузка, расположенная по одну сторону от выделенного сечения балки, заменяется результирующей сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести распределенной нагрузки. Момент от распределенной нагрузки подсчитывается как произведение этой результирующей силы на ее плечо. При этом закон изменения момента зависит от того взято сечение в пределах действия распределенной нагрузки или за ее пределами.

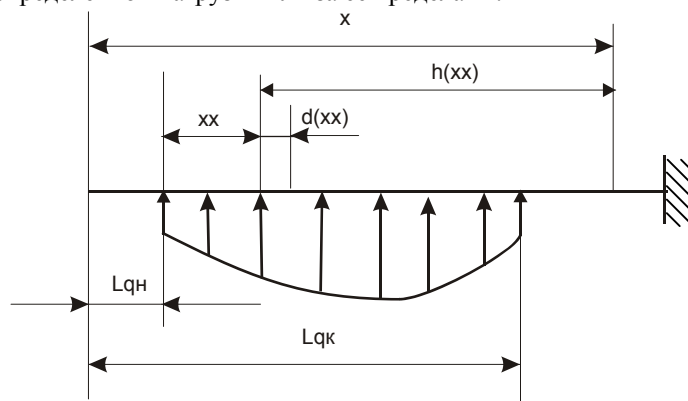


Рис. 11П.1. Балка, нагруженная произвольной распределенной нагрузкой

Построим выражение для изгибающего момента, единое для всех участков балки. На рисунке 11П.1 показана балка, нагруженная произвольной распределенной нагрузкой. На расстоянии xx от начала нагрузки выделим элемент длиной $d(xx)$.

На него действует нагрузка $q(x) \cdot d(xx)$. На расстоянии x от начала балки выделим произвольное сечение и найдем изгибающий момент в этом сечении.

От нагрузки, действующей на элемент $d(xx)$,

$$dM_{zq} = q(xx) \cdot d(xx) \cdot h(x),$$

где $h(x) = x - xx - L_{qh}$ — плечо силы $q(x) \cdot d(xx)$.

Полный изгибающий момент от распределенной нагрузки равен

$$M_{zq}(x) = \int_0^{xx} q(xx) \cdot h(x) \cdot d(xx) \quad (11.2),$$

если сечение взято в пределах распределенной нагрузки, и

$$M_{zq}(x) = \int_0^{L_{qk} - L_{qh}} q(xx) \cdot h(x) \cdot d(xx) \quad (11.3),$$

если сечение взято за пределами распределенной нагрузки.

Если распределенная нагрузка постоянной интенсивности приложена лишь к части балки, то ее можно заменить двумя нагрузками: распределенной нагрузкой, приложенной от сечения $x = L_{qh}$ до конца стержня, и фиктивной распределенной

нагрузкой той же величины, но противоположного направления, приложенной от сечения $x = L_{qк}$ до конца стержня

$$Q_q(x) = \sum q_i \cdot (x - L_{qн}) - \sum q_i \cdot (x - L_{qк})$$

$$M_{zq}(x) = \sum q_i \cdot \frac{(x - L_{qн})^2}{2} - \sum q_i \cdot \frac{(x - L_{qк})^2}{2} \quad (11.4).$$

Расчет в Mathcad внутренних усилий при изгибе для балки, условно показанной на рис. 11.2, с распределенной нагрузкой постоянной интенсивности по формулам (11.2), (11.4) приведен на рис. 11П.3. Результаты расчета приведены на рис. 11П.4. Интегральные выражения для $M_z(x)$ по формулам (11.2), (11.3), используемые в

Mathcad, приведены на рис. 11П.3. Выражения $M_z(x)$ по формуле (11.4)

приведены на рис. 11П.4. Результаты расчета по обеим формулам естественно совпадают. Однако скорость расчета по интегральному выражению (11.3) во много раз меньше, так как вычисление интеграла самая медленная операция в Mathcad.

Математически поперечную силу и изгибающий момент можно записать следующим образом

$$Q(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx$$

$$M_z(x) = \sum M_i + \sum \int F_i \cdot h(x) + \sum \int q_i(x) \cdot h(x) \cdot dx$$

Для использования этих выражений надо записать функцию изменения интенсивности распределенной нагрузки по длине стержня

q = Const

$$qq(x) := \begin{cases} q_1 & \text{if } L_{qн_1} \leq x \leq L_{qк_1} \\ q_2 & \text{if } L_{qн_2} \leq x \leq L_{qк_2} \\ 0 \cdot \frac{kH}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Поперечная сила

q - переменная

включите это выражение

$$qq(x) := \begin{cases} 4 \cdot q_1 \cdot \frac{x - L_{qн_1}}{L - L_{qн_1}} & \text{if } L_{qн_1} \leq x \leq L_{qк_1} \\ q_2 \cdot \left[1 - \frac{x - L_{qн_2}}{L - L_{qн_2}} \right] & \text{if } L_{qн_2} \leq x \leq L_{qк_2} \\ 0 \cdot \frac{kH}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Q(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \int_0^x qq(x) dx$$

заделка при $x = L$

Изгибающий момент

$$M_z(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x \geq L_{M_i})] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x \geq L_{F_i})] + \int_0^x qq(x) \cdot (x - xxx) dx$$

Рис. 11П.2. Схема условного нагружения балки при изгибе и исходные данные для расчета

Математически поперечную силу и изгибающий момент можно записать следующим образом

$$Q(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx$$

$$M_z(x) = \sum M_i + \sum \int F_i \cdot h(x) + \sum \int q_i(x) \cdot h(x) \cdot dx$$

Для использования этих выражений надо записать функцию изменения интенсивности распределенной нагрузки по длине стержня

q = Const

$$qq(x) := \begin{cases} q_1 & \text{if } L_{qн_1} \leq x \leq L_{qк_1} \\ q_2 & \text{if } L_{qн_2} \leq x \leq L_{qк_2} \\ 0 \cdot \frac{kH}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Поперечная сила

q - переменная

включите это выражение

$$qq(x) := \begin{cases} 4 \cdot q_1 \cdot \frac{x - L_{qн_1}}{L - L_{qн_1}} & \text{if } L_{qн_1} \leq x \leq L_{qк_1} \\ q_2 \cdot \left[1 - \frac{x - L_{qн_2}}{L - L_{qн_2}} \right] & \text{if } L_{qн_2} \leq x \leq L_{qк_2} \\ 0 \cdot \frac{kH}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Q(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \int_0^x qq(x) dx$$

заделка при $x = L$

Изгибающий момент

$$M_z(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x \geq L_{M_i})] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x \geq L_{F_i})] + \int_0^x qq(x) \cdot (x - xxx) dx$$

37

При работе с примером включите выражение для переменной нагрузки и посмотрите результат расчета. Для расчета использованы те же треугольные нагрузки, что и при растяжении и при кручении.

На рис. 11П.5 над эпюрами Q и M показана консольная балка с реальным расположением нагрузок. Проверьте правильность построения эпюр с учетом дифференциальных зависимостей между Q и M .

Определение внутренних усилий заделка при $x = L$

$$Q_F(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x \geq L_{F_i})] \quad \text{от сосредоточенных сил}$$

от распределенной нагрузки интенсивностью $q = \text{Const}$

$$Q_q(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{qH_i}) \cdot (x \geq L_{qH_i})] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{qK_i}) \cdot (x \geq L_{qK_i})]$$

$$Q(x) := Q_F(x) + Q_q(x)$$

$$M_{zM}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x \geq L_{M_i})] \quad \text{от пар сил}$$

$$M_{zF}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x \geq L_{F_i})] \quad \text{от сосредоточенных сил}$$

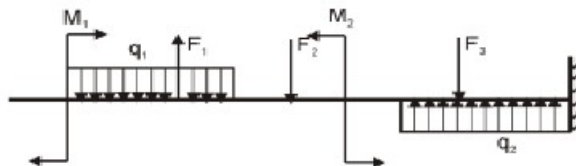
от распределенной нагрузки интенсивностью $q = \text{Const}$

$$M_{zq}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot \frac{(x - L_{qH_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{qH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot \frac{(x - L_{qK_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{qK_i}) \right]$$

$$M_z(x) := M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$$

Рис. 11П.4. Расчет изгибающего момента M_z с учетом $q = \text{Const}$

Реальное расположение нагрузок на балке



Эпюры изгибающего момента M и поперечной силы Q

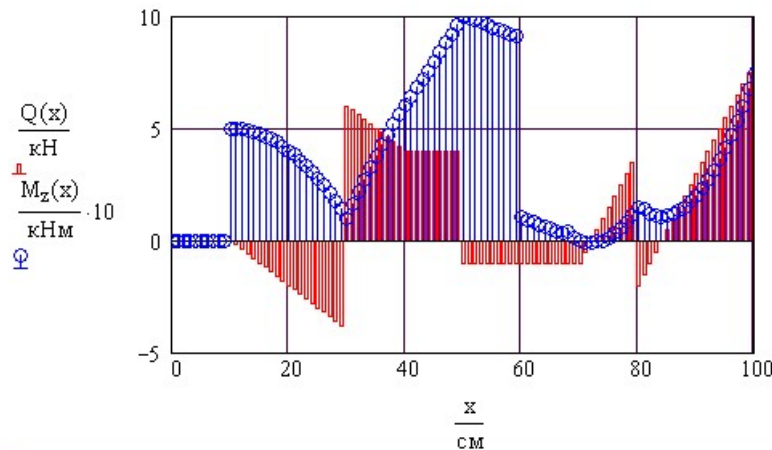


Рис. 11П.5. Результаты расчета поперечной силы Q и изгибающего момента M при $q = \text{Const}$

При наличии построенных эпюр поперечных сил и изгибающих моментов нет необходимости использовать Mathcad для определения максимальных значений Q и M , если расчет напряжений производится вручную. Если же напряжения должны

быть рассчитаны в Mathcad, то и максимальные значения должны определяться в Mathcad. Однако в Mathcad нет средств определения экстремума функции со скачками и разрывами. В расчете для поиска максимума функций Q и M использована самодельная функция **Fmax**, реализующая перебор значений функции в заданном интервале значений аргумента.

Для определения напряжений в опасном сечении используют значения Q и M, взятые по модулю,

$L_H := 0 \cdot \text{м}$ $L_K := L$ $N := 100$ Поменяйте параметры поиска

**В составном массиве вывода результатов расчета
сделать все размерности одинаковыми**

Для определения Mmax

```

Fmax(F, LH, LK, N) :=
    L ← LH
    A1 ← |F(L)|
    while L < LK
        L ← L +  $\frac{L_K - L_H}{N}$ 
        A2 ← |F(L)|
        if A2 > A1
            A1 ← A2
            L2 ← L
    (A1 L2·H)T

```

$M_{\text{max}} := F_{\text{max}}(M_Z, L_H, L_K, N)_1$

**Возвращение
к исходной размерности**

$xM_{\text{max}} := \frac{F_{\text{max}}(M_Z, L_H, L_K, N)_2}{H}$

$M_{\text{max}} = 1000 \text{ Нм}$

$xM_{\text{max}} = 0.5 \text{ м}$

Для определения Qmax

```

F1max(F, LH, LK, N) :=
    L ← LH
    A1 ← |F(L)|
    while L < LK
        L ← L +  $\frac{L_K - L_H}{N}$ 
        A2 ← |F(L)|
        if A2 > A1
            A1 ← A2
            L2 ← L
     $\left( A1 \quad L2 \cdot \frac{H}{\text{м}} \right)^T$ 

```

$Q_{\text{max}} := F1_{\text{max}}(Q, L_H, L_K, N)_1$

**Возвращение
к исходной размерности**

$xQ_{\text{max}} := \frac{F1_{\text{max}}(Q, L_H, L_K, N)_2 \cdot \text{м}}{H}$

$Q_{\text{max}} = 8 \text{ кН}$

$xQ_{\text{max}} = 1 \text{ м}$

Рис. 11П.6. Нахождение максимальных значений изгибающего момента M и поперечной силы Q

На рис. 11П.6 показаны две программы **Fmax**. Одна для поиска максимума поперечной силы и другая для изгибающего момента. Это связано с тем, что Mathcad не допускает присутствия в массивах данных элементов с различной размерностью. Поэтому произведено искусственное выравнивание размерностей в массивах. А затем выполнено возвращение к исходной размерности.

Пример 12. Определение внутренних усилий при изгибе балки на двух опорах

(Программа 12-vnutr4.mcd)

Расчет балки на двух опорах почти повторяет расчет консольной балки с заделкой. Особенностью нового расчета является необходимость определения опорных реакций из условий равновесия балки. Поперечная сила и изгибающий момент представляют собой уравнения равновесия отсеченной части балки. Эпюры внутренних усилий представляют собой графическое представление уравнений равновесия. С учетом реакций эпюры с нуля начинаются и нулем заканчиваются. В наших расчетах начало координат взято на левом конце балки, тогда на правом конце балки при $x = L$ $Q(L) = 0$ и $M_z(L) = 0$. Эти два условия используются для определения двух опорных реакций при изгибе балки на двух опорах. Фактически используются уравнения равновесия: сумма проекций всех сил на вертикальную ось и сумма моментов всех сил относительно правого конца балки.

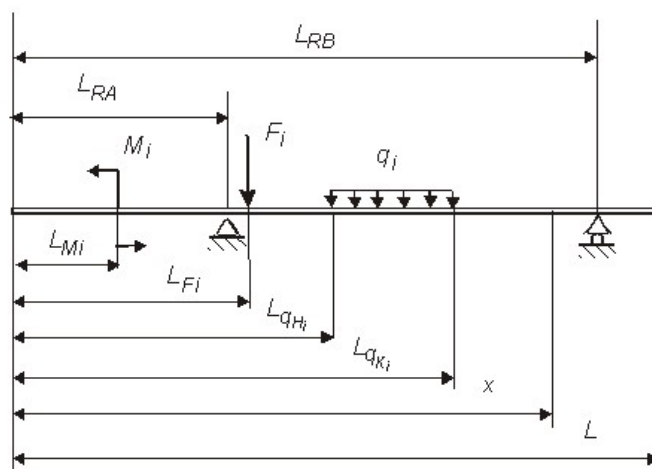
Условная расчетная схема балки и исходные данные для расчета показаны на рис. 12П.1. Реальные нагрузки, действующие на балку, показаны на рис. 12П.3 над эпюрами Q и M_z .

Расчет внутренних усилий с учетом опорных реакций приведен на рис. 12П.2. Для определения опорных реакций используется вычислительный блок [given-find](#), которому предшествуют начальные приближения для обеих реакций.

В уравнения для поперечных сил и изгибающих моментов включены слагаемые от опорных реакций R_A и R_B . Поскольку они не известны до момента их определения, то они обязательно должны быть включены в параметры функций внутренних усилий $Q(R_A, R_B, x)$ и $M_z(R_A, R_B, x)$. На рис. 12П.2 к выражениям для внутренних усилий, показанным на рис. 11П.3 (для консольной балки), добавлены слагаемые усилий от опорных реакций.

В примере на рис. 12П.2 опоры расположены в сечениях $L_{RA} = 40$ см и $L_{RB} = 70$ см.

Поменяйте расстояния до опор L_{RA} и L_{RB} и посмотрите как изменятся результаты расчета, показанные на рис. 12П.3.



Заданные нагрузки F, q, M и координаты точек их приложения

сосредоточенные силы

$$F := \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} \quad L_F := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

распределенные нагрузки

$$q := \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad L_{qH} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad L_{qK} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

пары сил

$$M := \begin{pmatrix} 500 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot \text{Нм} \quad L_M := \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

длина балки

$$L := 1 \cdot \text{м} \quad x := 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} \dots L$$

положение опор на балке

$$L_{RA} := 20 \cdot \text{см} \quad L_{RB} := 70 \cdot \text{см}$$

Рис. 12П.1. Схема условного нагружения балки при изгибе и исходные данные для расчета

q = Const

$$qq(x) := \begin{cases} q_1 & \text{if } L_{qH_1} \leq x \leq L_{qK_1} \\ q_2 & \text{if } L_{qH_2} \leq x \leq L_{qK_2} \\ 0 \cdot \frac{\kappa H}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

q - переменная

включите это выражение

$$qq(x) := \begin{cases} 4 \cdot q_1 \cdot \frac{x - L_{qH_1}}{L - L_{qH_1}} & \text{if } L_{qH_1} \leq x \leq L_{qK_1} \\ q_2 \cdot \left[1 - \frac{x - L_{qH_2}}{L - L_{qH_2}} \right] & \text{if } L_{qH_2} \leq x \leq L_{qK_2} \\ 0 \cdot \frac{\kappa H}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Поперечная сила

$$Q(R_A, R_B, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x \geq L_{RB}) + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \int_0^x qq(x) dx$$

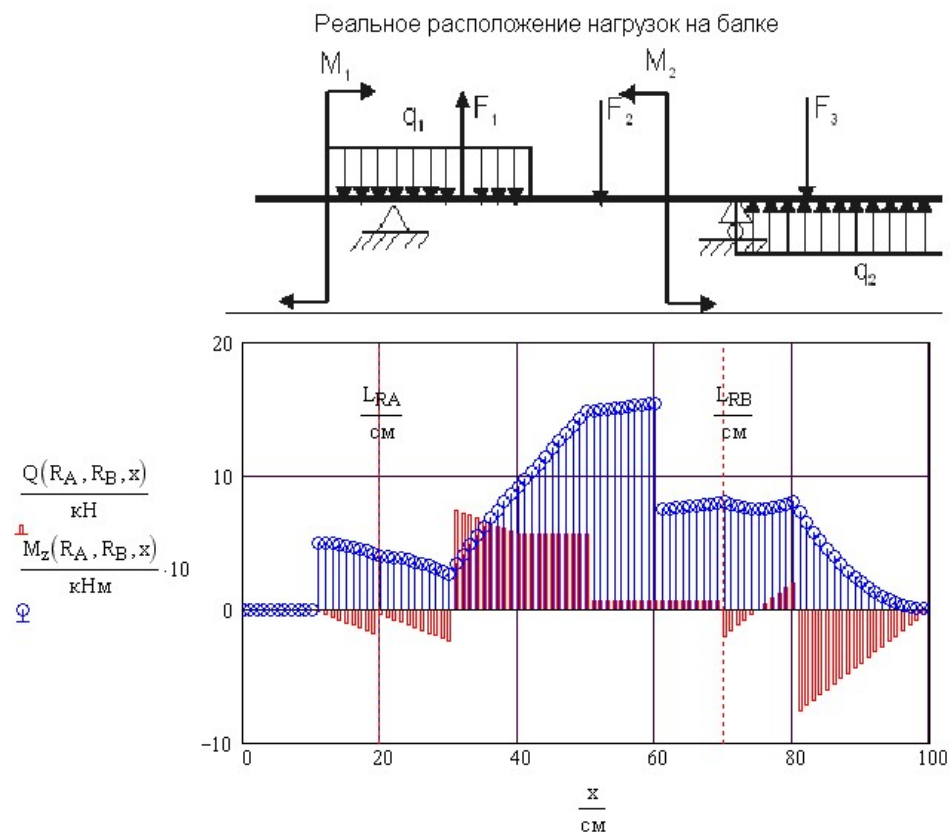
Изгибающий момент

$$M_z(R_A, R_B, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB}) + \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x > L_{M_i})] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x \geq L_{F_i})] + \int_0^x qq(x) \cdot (x - \text{xxx}) dx$$

Определение опорных реакций
 $R_A := 10 \cdot \kappa H$ $R_B := 10 \cdot \kappa H$ начальные приближения

Given $M_z(R_A, R_B, L) = 0$ $Q(R_A, R_B, L) = 0$

$$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, R_B) \quad R_A = 1.6 \kappa H \quad R_B = -2.6 \kappa H$$

Рис. 12П.2. Расчет внутренних усилий и определение опорных реакций в балке на двух опорах**Рис. 12П.3.** Результаты расчета внутренних усилий и опорных реакций в балке на двух опорах

Далее в примере определяются максимальные величины поперечной силы и изгибающего момента также как для консольной балки (рис. 11П.6).

Следует отметить, что, как и в примере 11 (для консольной балки), при $q = \text{Const}$ внутренние усилия можно определить по формулам (11.4) без расчета интегралов по длине (рис. 12П.4).

$$Q_F(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x > L_{F_i})] \text{ от сосредоточенных сил}$$

от распределенной нагрузки интенсивностью $q = \text{Const}$

$$Q_q(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{qH_i}) \cdot (x > L_{qH_i})] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{qK_i}) \cdot (x > L_{qK_i})]$$

$$Q_{RA}(R_A, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA}) \quad Q_{RB}(R_B, x) := R_B \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$Q(R_A, R_B, x) := Q_{RA}(R_A, x) + Q_{RB}(R_B, x) + Q_F(x) + Q_q(x)$$

$$M_{zM}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x > L_{M_i})] \text{ от пар сил}$$

$$M_{zF}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x > L_{F_i})] \text{ от сосредоточенных сил}$$

от распределенной нагрузки интенсивности $q = \text{Const}$

$$M_{zq}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot \frac{(x - L_{qH_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \cdot \frac{(x - L_{qK_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qK_i}) \right]$$

$$M_{zRA}(R_A, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA})$$

$$M_{zRB}(R_B, x) := R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$M_z(R_A, R_B, x) := M_{zRA}(R_A, x) + M_{zRB}(R_B, x) + M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$$

Рис. 12П.4. Более быстрое определение внутренних усилий

Приведенные примеры определения внутренних усилий показывают, что для Mathcad практически нет неразрешимых задач. Для одного отдельно взятого стержня можно определить внутренние усилия при любых нагрузках. Другой вопрос надо ли это для практических задач. На практике стержень или балка нагружены, как правило, одной или двумя нагрузками, не считая опорных реакций. Если распределенная нагрузка распределена по какому-то сложному закону, то чаще всего ее интенсивность принимается постоянной или распределенная нагрузка заменяется сосредоточенной силой.

Для простых задач не имеет смысла использовать Mathcad, если задачу можно проще и быстрее решить с помощью микрокалькулятора.

СОВЕТ

Mathcad должен упрощать расчеты, а не усложнять. Не используйте Mathcad для решения простых задач.

Еще одно ограничение при использовании Mathcad — это определение внутренних усилий в рамах и ломаных стержнях. Если для длинного стержня с большим количеством нагрузок с помощью условных операторов внутренние усилия на всех участках можно описать одним уравнением, то для ломаного стержня каждый перелом — отдельный участок с отдельным уравнением, которое требуется записать вручную. Построить единую эпюру для всех участков ломаного стержня Mathcad также не в силах. Написать программу для таких вычислений конечно можно, но «овчинка выделки не стоит». Ручной работы много, программа сложная, преимущества Mathcad не видно.

Пример 13. Растяжение статически определимого стержня.

(Программа 13-rast1.mcd)

Для стержня переменного сечения, нагруженного тремя силами и двумя распределенными нагрузками (рис. 13.1), требуется найти распределение напряжений и перемещений по длине стержня

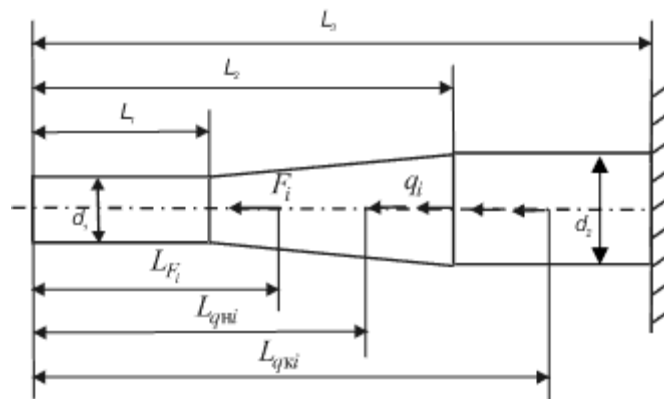


Рис. 13П.1. Условная схема нагружения стержня

Стержень круглого поперечного сечения переменного диаметра. Первый участок — диаметром d_1 , третий — диаметром d_2 , а на втором (среднем) участке диаметр изменяется по линейному закону от d_1 до d_2 . Границы участков обозначены размерами L_1 , L_2 , L_3 . Стержень нагружен тремя силами F_1 , F_2 , F_3 , приложенными в сечениях на расстояниях L_{F1} , L_{F2} , L_{F3} от левого края и двумя распределенными нагрузками q_1 и q_2 . Расстояние от общего начала координат (на левом конце стержня) до начала распределенной нагрузки L_{qn1} и L_{qn2} , до конца распределенной нагрузки L_{qk1} и L_{qk2} . Интенсивность распределенной нагрузки q может быть любой (постоянной или переменной). На рис. 4.1 изображена условная схема нагружения стержня. Чтобы избежать загромождения чертежа, на нем указана одна сила F_i и одна распределенная нагрузка q_i и их координаты, которые также могут быть любыми.

Исходные данные для расчета приведены на рис. 4.2.

Поскольку расчет в Mathcad ведется с учетом размерностей в начале программы введены присвоения размерностей, производных от основных (рис. 4.2).

$$m := m \quad mm := 0.001 \cdot m \quad kH := 1000 \cdot N \quad MPa := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$$

Исходные данные

$$E := 2 \cdot 10^5 \cdot MPa$$

граница участков
разного диаметра

$$F := \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot kH \quad L_F := \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix} \cdot mm \quad L := \begin{pmatrix} 400 \\ 700 \\ 1000 \end{pmatrix} \cdot mm \quad LL := L_3$$

$$q := \begin{pmatrix} -40 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \frac{kH}{m} \quad L_{qn} := \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \end{pmatrix} \cdot mm \quad L_{qk} := \begin{pmatrix} 300 \\ 800 \end{pmatrix} \cdot mm$$

$$d1 := 5 \cdot mm \quad d2 := 10 \cdot mm \quad d(x) := (d2 - d1) \cdot \frac{x - L_1}{L_2 - L_1} + d1$$

Рис. 13П.2. Исходные данные для расчета стержня

Продольные усилия в произвольных сечениях стержня определяем методом сечений как сумму сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. Их определение показано на рис.13П.3. Для записи продольных усилий использованы выражения, полученные примере 9 (рис. 9П.3).

Изменение площади поперечного сечения $A(x)$ вдоль оси x задано на рис. 13П.3.

Применение булевых операторов в этом выражении сделало бы его малопонятным и некрасивым, поэтому оно записано с помощью панели программирования.

постоянная распределенная нагрузка

$$N(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} q_i \cdot (x - L_{qH_i}) \cdot (x > L_{qH_i}) + \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} -q_i \cdot (x - L_{qK_i}) \cdot (x > L_{qK_i})$$

$$qq(x) := \begin{cases} 5 \cdot q_1 \cdot \frac{x - L_{qH_1}}{LL - L_{qH_1}} & \text{if } L_{qH_1} \leq x \leq L_{qK_1} \\ \left[q_2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x - L_{qH_2}}{LL - L_{qH_2}} \right)^2 \right] \right] & \text{if } L_{qH_2} \leq x \leq L_{qK_2} \\ 0 \cdot \frac{KH}{M} & \text{otherwise} \end{cases}$$

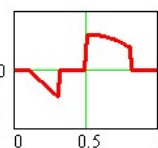
$$x := 0 \cdot \text{мм}, \frac{LL}{100} \dots LL$$

переменная
распределенная
нагрузка

$$N(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \int_0^x qq(xz) \, dz$$

$$x := 0 \cdot \text{мм}, \frac{LL}{20} \dots LL$$

qq(x)



Площади сечений A, нормальные напряжения σ и перемещение сечения ΔL

$$A(x) := \begin{cases} \left(\pi \cdot \frac{d_1^2}{4} \right) & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ \left(\pi \cdot \frac{d(x)^2}{4} \right) & \text{if } L_1 \leq x < L_2 \\ \left(\pi \cdot \frac{d_2^2}{4} \right) & \text{if } L_2 \leq x \leq L_3 \end{cases}$$

$$\sigma(x) := \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$\Delta L(x) := \int_x^{L_3} \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \, dx$$

При q - переменной расчет
очень медленный.
Включите выражения

В общем случае перемещение
записывается в виде
интеграла, как удлинение
части стержня от заделки до
выделенного сечения.

Рис. 13П.3. Площадь сечения $A(x)$, напряжение $\sigma(x)$ и удлинение $\Delta L(x)$ стержня

На том же рисунке записаны формулы для напряжения $\sigma(x)$ и перемещения $\Delta L(x)$.

В общем случае перемещение записывается в виде интеграла, как удлинение части стержня от заделки до выделенного сечения.

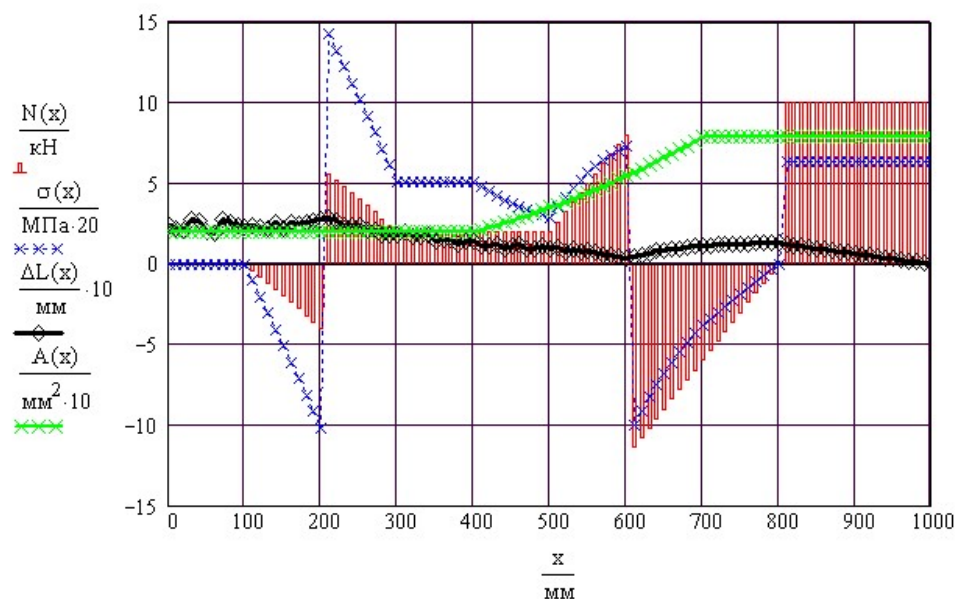


Рис. 13П.4. Результаты расчета статически-определимого стержня

Результаты расчета приведены на рис. 13П.4 в виде графиков. Так как расчет ведется с учетом размерностей, в диапазоне x все значения должны иметь одинаковую размерность (или не иметь ее). А вот графики не могут быть построены с размерными величинами, поэтому все размерные выражения разделены на размерность.

Таблица числовых значений результатов расчетов приведена в электронной книге. Для Mathcad расчет оказался примитивно простым, а вот при расчете вручную (на микрокалькуляторе) расчет напряжений и перемещений на десяти участках (3 по площади сечений и 7 по нагрузке) потребует много времени и сил.

Пример 14. Растяжение статически неопределимого стержня

(Программа 14-rast2.mcd)

Добавим на схеме (рис. 13П.1) заделку стержня слева (рис. 14П.1). Система станет один раз статически-неопределимой. Незвестных опорных реакций две, а полезное уравнение равновесия (не тождество) одно. Для определения опорных реакций необходимо добавить еще одно уравнение — уравнение совместности перемещений. Заделки — жесткие, поэтому взаимное смещение левой заделки относительно правой равно нулю.

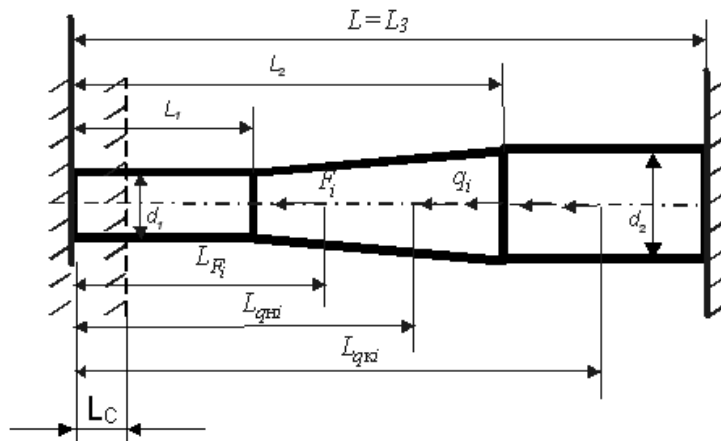


Рис. 14П.1. Условная схема нагружения статически неопределимого стержня

Для заданного статически неопределимого стержня требуется найти распределение напряжений и перемещений по длине стержня для двух случаев нагружения:

- от действия внешних сил,
- от действия внешних сил, изменения температуры и от монтажной ошибки.

Исходные данные для расчета приведены на рис. 14П.2.

$$\begin{aligned}
 E &:= 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} & d1 &:= 5 \text{ мм} & d2 &:= 10 \text{ мм} \\
 F &:= \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ кН} & L_F &:= \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 800 \end{pmatrix} \text{ мм} & L &:= \begin{pmatrix} 400 \\ 700 \\ 1000 \end{pmatrix} \text{ мм} \\
 d(x) &:= (d2 - d1) \cdot \frac{x - L_1}{L_2 - L_1} + d1 & LL &:= \max(L) & LL &:= 1 \text{ м} \\
 q &:= \begin{pmatrix} -40 \\ 60 \end{pmatrix} \frac{\text{кН}}{\text{м}} & L_{qH} &:= \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \end{pmatrix} \text{ мм} & L_{qK} &:= \begin{pmatrix} 300 \\ 800 \end{pmatrix} \text{ мм} \\
 A(x) &:= \begin{cases} \pi \cdot \frac{d1^2}{4} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ \pi \cdot \frac{d(x)^2}{4} & \text{if } L_1 \leq x < L_2 \\ \pi \cdot \frac{d2^2}{4} & \text{if } L_2 \leq x \leq L_3 \end{cases} & m &:= \text{rows}(L_{qH}) & n &:= \text{rows}(F) \\
 & & x &:= 0 \text{ мм}, \frac{LL}{100} \dots LL \\
 \alpha &:= 12.5 \cdot 10^{-6} \\
 \text{коэффициент линейного расширения} & & & & & \\
 \text{Задаемся положением наложенной связи } C & & & & & \\
 \text{и сдвигом сечения } \Delta_{\text{МОНТ}} \text{ в месте ее наложения} & & & & & \\
 \text{поменяйте } L_C, \Delta_{\text{МОНТ}} \text{ и } \Delta t & & & & & \\
 \text{монтажный зазор } \Delta_{\text{МОНТ}} \text{ в сечении } C, \text{ его положение } L_C \text{ и} & & & & & \\
 \text{изменение температуры } \Delta t \text{ заданы глобально над графиком} & & & & &
 \end{aligned}$$

Рис. 14П.2. Исходные данные для расчета статически неопределимого стержня на растяжение

ПРИМЕЧАНИЕ

Расчет шарнирно-стержневой системы под действием одной внешней силы в программе 14-rast2.mcd помещен в скрытую зону. Двойной щелчок мышью на линии скрытой зоны раскрывает ее.

Поскольку опорная реакция еще не известна, то во все выражения она должна войти параметром функции. Выражения для продольного усилия приведены на рис. 14П.3 для напряжений и удлинений на рис. 14П.4.

постоянная распределенная нагрузка

$$N(x, R) := R + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) \dots + \left[\sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} q_i \cdot (x - L_{qH_i}) \cdot (x > L_{qH_i}) + \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} -q_i \cdot (x - L_{qK_i}) \cdot (x > L_{qK_i}) \right]$$

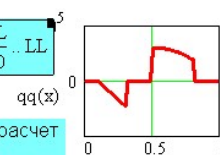
$$qq(x) := \begin{cases} 5 \cdot q_1 \cdot \frac{x - L_{qH_1}}{LL - L_{qH_1}} & \text{if } L_{qH_1} \leq x \leq L_{qK_1} \\ q_2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x - L_{qH_2}}{LL - L_{qH_2}} \right)^2 \right] & \text{if } L_{qH_2} \leq x \leq L_{qK_2} \\ 0 \cdot \frac{kH}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x := 0 \text{ мм}, \frac{LL}{100} \dots LL$$

переменная распределенная нагрузка

$$N(x, R) := R + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} F_i \cdot (x > L_{F_i}) + \int_0^x qq(xx) \, dxx$$

$$x := 0 \text{ мм}, \frac{LL}{20} \dots LL$$



При q - переменной расчет очень медленный. Включите выражения

Рис. 14П.3. Определение продольных усилий в статически неопределимом стержне при растяжении

Напряжения

$$\sigma(x, R) := \frac{N(x, R)}{A(x)}$$

Удлинение стержня

$$\Delta L(x, R) := \int_0^x \frac{N(x, R)}{E \cdot A(x)} \, dx$$

решение уравнения неразрывности деформаций $\Delta L(LL, R) = 0$

$R := 10 \cdot \text{кН}$ начальное приближение

$$R := \text{root}(\Delta L(LL, R), R)$$

$R = -8.078 \text{ кН}$ Реакция в левой заделке

Проверка перемещение концов стержня $x=0$ и $x=LL$

$$\Delta L(LL, R) = -0 \text{ мм} \quad \Delta L(0 \text{ мм}, R) = 0 \text{ мм}$$

Рис. 14П.4. Определение опорной реакции статически неопределимого стержня

Опорная реакция в левой заделке определяется с помощью функции **root** из условия равенства нулю полного удлинения стержня. Результаты расчета приведены на рис. 14П.5.

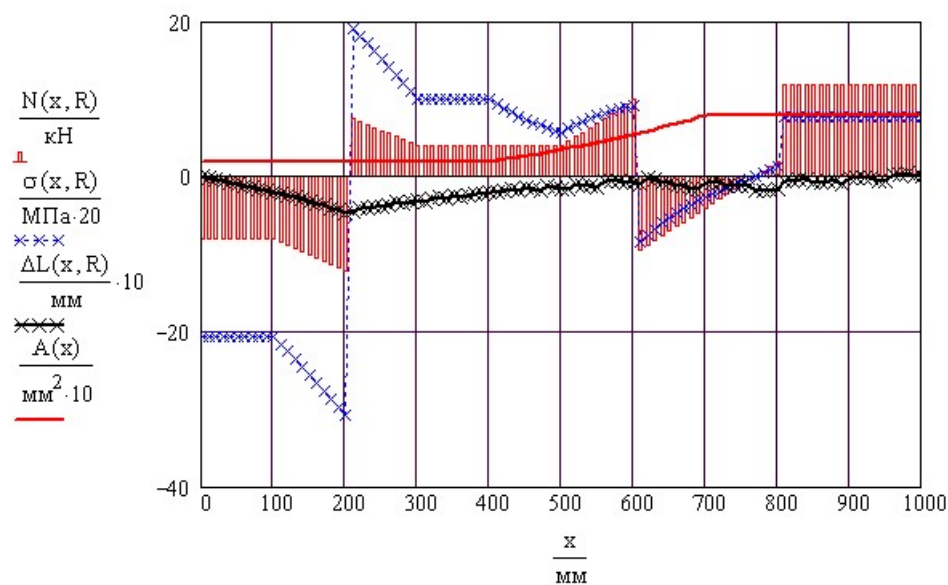


Рис. 14П.5. Результаты расчета статически неопределимого стержня на растяжение

Суммарное действие нагрузок, изменения температуры и монтажной ошибки

В статически-неопределимых системах возможно возникновение монтажных напряжений, вызванных ошибками при изготовлении стержней или при сборке конструкции.

Допустим стержень изготовлен на величину $\Delta_{\text{монт}}$ короче, чем надо. Короткий стержень надо растянуть при сборке, а длинный стержень сжать до требуемого размера. Тогда условие совместности перемещений после сборки примет вид $\Delta_{AB} = -\Delta_{\text{монт}}$. Здесь A и B — жесткие заделки стержня. Исходя из этого условия с помощью функции `root` определяется реакция в заделке.

Поставим более общую задачу. В некотором сечении C стержня при $x = L_C$ наложим связь, ограничивающую перемещение. Это может быть какой-то упор, болтовое соединение, сварка. При монтаже конструкции возможны погрешности установки, поэтому перемещение сечения C может быть равно не нулю, а монтажному зазору $\Delta_{\text{монт}}$. Тогда перемещение сечения C относительно правой заделки B $\Delta_{CB} = -\Delta_{\text{монт}}$. Требуется найти для этого случая распределение напряжений и перемещений по длине стержня.

Рассмотрим влияние нагрева стержня на его удлинение и напряжения в нем. При нагревании стержня его длина увеличивается на величину

$$\Delta L_t = L \cdot \alpha \cdot \Delta t,$$

где L — длина стержня, α — коэффициент линейного расширения материала стержня, Δt — приращение температуры.

В статически-определимых системах, где нет ограничений на перемещение стержней температурные напряжения не возникают.

В статически-неопределимых системах стержень при нагревании стремится расшириться, но наложенные ограничения не позволяют этого. Возникают сжимающие напряжения, вызывающие укорочение стержня.

Полное удлинение стержня складывается из удлинения от продольного усилия N и изменения температуры

$$\Delta L = \Delta L_N + \Delta L_t = \int_L \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} + L \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

Полное перемещение в месте наложения связи

$$\Delta = \Delta L_N + \Delta L_t + \Delta_{\text{монт}} = \int_L \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} + L \cdot \alpha \cdot \Delta t + \Delta_{\text{монт}} = 0,$$

При нагревании стержня в нем возникают сжимающие усилия, при охлаждении — растягивающие.

В общем случае перемещение записывается в виде интеграла, как удлинение части стержня от заделки $x = LL$ до выделенного сечения x (рис. 14П.6).

Рассмотрим одновременное действие на стержень внешних нагрузок, изменения температуры и монтажной погрешности.

Решение поставленной задачи вручную непомерно сложно. Для Mathcad задача проста. Незвестную реакцию R в сечении C включаем в выражение для продольного усилия. Но поскольку она заранее не известна, то должна войти параметром в выражение-функцию $N(x, R)$,

коэффициент линейного расширения $\alpha := 12.5 \cdot 10^{-6}$

нормальные напряжения σ и перемещение сечения ΔL

$$\sigma(x, R) := \frac{N(x, R)}{A(x)} \quad \Delta L(x, R) := \int_x^{L_3} \frac{N(x, R)}{E \cdot A(x)} + \alpha \cdot \Delta t \, dx \quad x := 0 \cdot \text{мм}, \frac{L_3}{100} \dots L_3$$

решение уравнения неразрывности деформаций $\Delta(L_C) + \Delta_{\text{МОНТ}} = 0$

$R := 0 \cdot \text{кН}$ начальное приближение $R := \text{root}(\Delta L(L_C, R) + \Delta_{\text{МОНТ}}, R)$

$R = -5.973 \text{ кН}$ Реакция связи в точке С

$\Delta L(0, R) = 1.07 \text{ мм}$ перемещение конца стержня $x=0$

Рис. 14П.6. Формулы для решения статически-неопределимой задачи.

Выражения для напряжений и перемещений также записываем в виде функции от реакции $\sigma(x, R)$ и $\Delta(x, R)$. Расчетные формулы для решения поставленной задачи приведены на рис. 14П.6.

Далее, решая уравнение совместности деформаций $\Delta_{CB} + \Delta_{\text{МОНТ}} = 0$ (рис. 14П.6), определяем реакцию R . Для решения используем функцию **root**, которой должно предшествовать начальное приближение. Поскольку ответ (значение реакции) размерная величина, то и начальное приближение должно быть размерной величиной, то есть число, умноженное на размерность.

Глобальный ввод исходных данных

$L_C = 50 \cdot \text{мм}$ $\Delta_{\text{МОНТ}} = -1.0 \cdot \text{мм}$ $\Delta t = 50$

Поменяйте монтажный зазор $\Delta_{\text{МОНТ}}$ в сечении С, положение сечения L_C и изменение температуры Δt

Результаты расчета

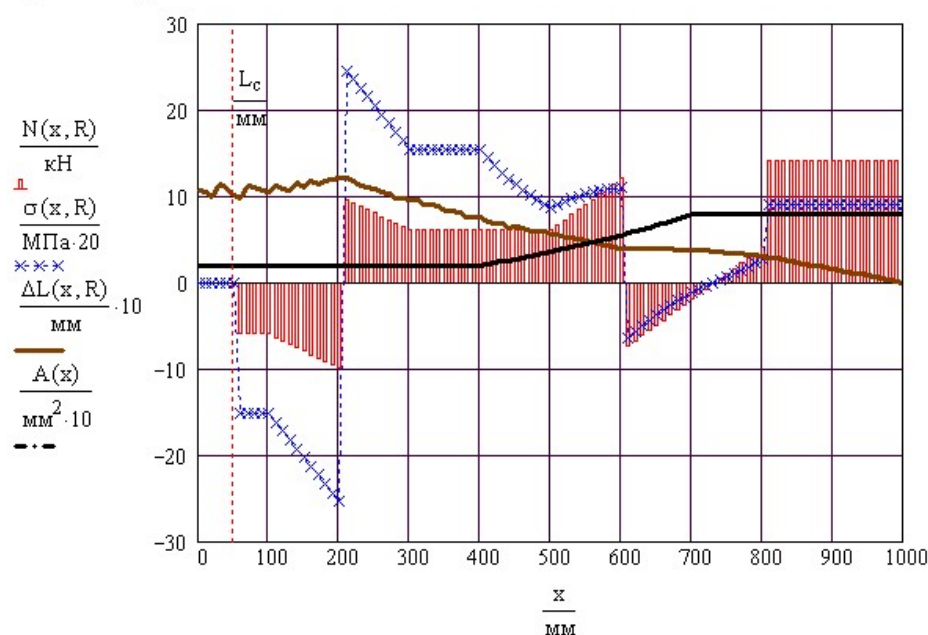


Рис. 14П.7. Результаты решения статически-неопределимой задачи

Результаты расчета статически неопределимого стержня при одновременном воздействии внешних сил, температурных и монтажных напряжений показаны на рис. 14П.7.

Протестируйте программу. Положите диаметры d_1 и d_2 одинаковыми. Все нагрузки, кроме одной, положите равными нулю. Положите $\Delta t = 0$ и $\Delta_{\text{МОНТ}} = 0$

Обратите внимание, что при расчетах выполняется принцип независимости действия сил. В общем случае нагружения стержня напряжения σ равны сумме напряжений от действия внешних нагрузок, от изменения температуры и от монтажных ошибок при сборке.

Пример 15. Растяжение-сжатие статически неопределимой шарнирно-стержневой системы.

(Программа 15-rast3.mcd)

В данном примере для раскрытия статической неопределимости используется *метод засечек*. Этот метод не универсальный и здесь нет общего правила решения задачи. Чтобы решить задачу, надо разобраться в схемах деформаций и перемещений системы. Для различных задач вид уравнений будет разным.

Программа, составленная в данном примере, позволяет рассчитывать шарнирно-стержневые статически-неопределимые системы, в которых один из элементов *абсолютно жесткий (недеформируемый)*.

Рассмотрим шарнирно-стержневую систему, состоящую из одной жесткой балки AB и 4-х деформируемых стержней, шарнирно соединенных с балкой и работающих на растяжение или сжатие (рис. 15П.1). Данная система три раза статически неопределима.

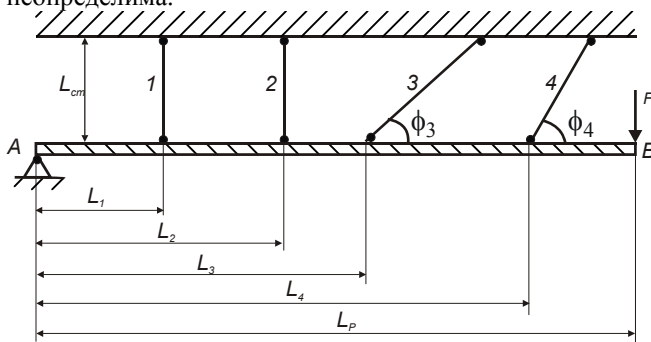


Рис. 15П.1. Заданная шарнирно-стержневая система

Принцип решения задачи рассмотрим на примере действия одной внешней силы. Затем добавим к этой силе изменение температуры и монтажные ошибки.

Действие на систему одной внешней силы

ПРИМЕЧАНИЕ

Расчет шарнирно-стержневой системы под действием одной внешней силы в программе 15-rast3.mcd помещен в скрытую зону. Двойной щелчок мышью на линии скрытой зоны раскрывает ее.

На балку действует сила F (можно приложить и несколько сил) и задана точка ее приложения L_F . Заданы длины стержней $L_{ст}$, расстояния от оси вращения жесткого элемента A до точек крепления стержней L_i к жесткому элементу, углы ϕ_i между стержнем и радиусом вращения точки крепления стержня к жесткому элементу.

$$E := 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \quad \sigma_{\text{доп}} := 100 \text{ МПа} \quad F := 10 \text{ кН} \quad L_F := 100 \text{ см}$$

$$L := \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad \phi := \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 45 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{град} \quad L_{\text{ст}} := \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ \frac{30}{\sin(\phi_3)} \\ \frac{30}{\sin(\phi_4)} \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \text{см}^2 \quad \text{площади сечений} \quad k := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} k=1 \text{ растяжение} \\ k=-1 \text{ сжатие} \end{matrix}$$

Рис. 15П.2. Исходные данные к расчету шарнирно-стержневой системы

Исходные данные для расчета приведены на рис. 15П.2. Материал стержней — сталь, для которой заданы: модуль Юнга E , допускаемое напряжение $[\sigma]$, которое в программе Mathcad обозначено $\sigma_{\text{доп}}$, так как Mathcad не принимает название

величины, стоящее в квадратных скобках, считая его математическим выражением. Кроме того, задан коэффициент учета знака деформации стержней k .

Дело в том, что в записанных далее уравнениях Mathcad не различает положение стержней сверху или снизу от балки, а результат расчета зависит от этого. Условимся считать $k = 1$, если стержень удлиняется при деформации, и $k = -1$, если — укорачивается.

В данной задаче 6 неизвестных: 4 продольных усилия в стержнях и две реакции в шарнирной опоре A (горизонтальная и вертикальная). Следовательно надо составить систему из 6-и уравнений (3 уравнения равновесия и 3 уравнения совместности перемещений) и решить ее. Однако, если взять в качестве уравнения равновесия сумму моментов относительно опоры A , то реакции на опоре не войдут в расчет и достаточно решить систему из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными продольными усилиями в стержнях.

При составлении уравнения равновесия полагаем, что продольные усилия возникают, как реакция на приложение силы F и их действие противоположно действию силы. Знак продольного усилия и напряжения зависит от расположения стержня и учитывается коэффициентом k .

$$FL_F - \sum_{i=1}^m k_i N_i L_i \sin(\phi_i) = 0$$

Уравнения совместности перемещений связывают между собой перемещения шарнирных узлов крепления стержней, которые выразим через удлинения стержней, а их, в свою очередь, через продольные усилия в стержнях.

Шарнир — часть жесткого элемента (балки). Перемещения точек жесткого элемента Δ_i пропорциональны их радиусам вращения L_i вокруг точки подвеса этого элемента.

$$\frac{\Delta_1}{L_1} = \frac{\Delta_2}{L_2} = \frac{\Delta_3}{L_3} = \frac{\Delta_4}{L_4} \quad (15.1).$$

Эта запись представляет собой 6 уравнений совместности перемещений. Для решения задачи достаточно трех любых из этих уравнений.

Каждое перемещение шарнира Δ выразим через удлинение стержня. Для этого используем *метод засечек*.

Изобразим вид системы из одной балки и одного стержня до и после деформации (рис. 15П.3). Под действием силы F балка повернулась вокруг точки подвеса A на некоторый очень малый угол (тысячные доли градуса). Однако на схеме этот угол для наглядности изображен достаточно большим.

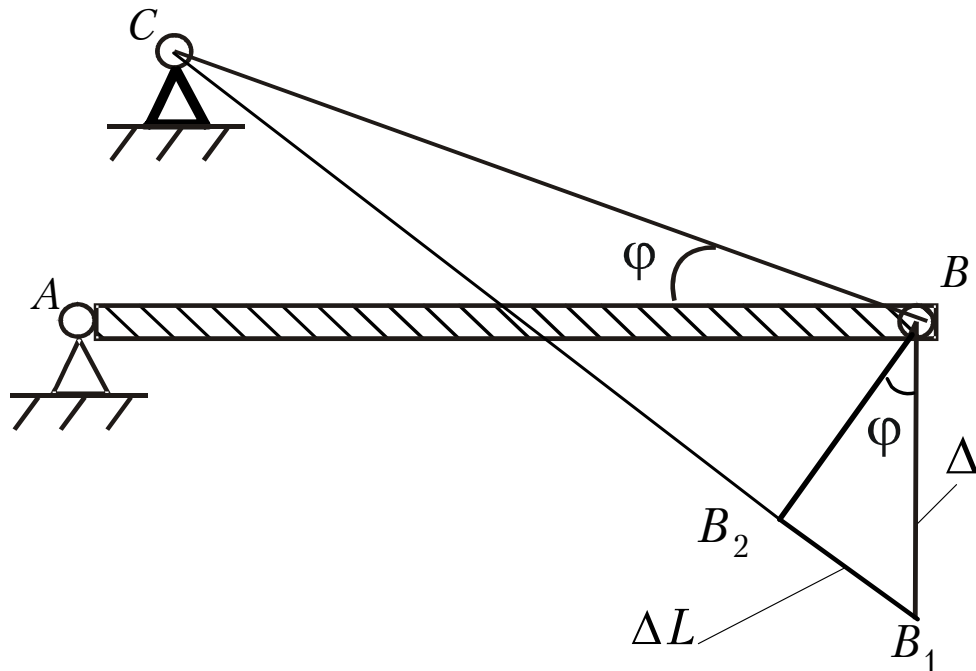


Рис. 15П.3. Связь перемещения BB_1 и удлинения ΔL по методу засечек

Шарнир B переместился в положение B_1 . Удлинился и переместился вслед за шарниром B и стержень.

Повернем деформированный стержень до своего исходного положения. Разность длин стержня до и после деформации есть удлинение стержня $B_1B_2 = \Delta L$.

Поскольку угол поворота стержня ничтожно мал, дуги окружности при повороте стержня и балки заменяем касательными к окружности вращения (или, что то же самое, перпендикулярами к радиусам вращения). В результате на схеме видим прямоугольный треугольник перемещения с известным из геометрии системы

углом ϕ . Откуда находим связь между перемещением шарнира Δ и удлинением стержня ΔL

$$\Delta = \frac{\Delta L}{\sin(\phi)} \quad (15.2).$$

Тот же результат, но проще и понятнее достигается в *обратном методе засечек*, суть которого в следующем.

Задаемся новым положением жесткого элемента или, что то же самое, положением шарниров после деформации.

Из нового положения шарниров опустить перпендикуляры на продолжение стержней, отсекающих их удлинение (или укорочение).

Для получившейся схемы ищем связь между перемещениями шарниров и удлинениями стержней.

Применение обратного метода засечек к заданной системе показано на рис. 15П.4.

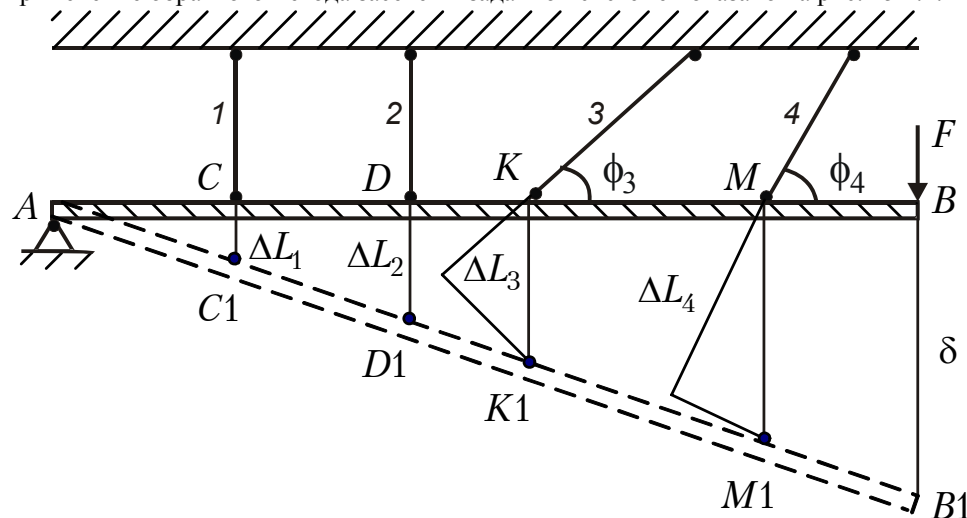


Рис. 15П.4. Обратный метод засечек

Из подобия треугольников записываем связь между перемещениями шарниров

$$\frac{\Delta L_1}{AC} = \frac{\Delta L_2}{AD} = \frac{\Delta L_3}{AK} = \frac{\Delta L_4}{AM} = \frac{\delta}{AB} \quad (15.3),$$

где δ — перемещение точки приложения силы.

Выражение (15.3) аналогично выражению (15.1).

Рассматривая далее треугольники перемещений получаем

$$CC1 = \Delta L_1 \quad DD1 = \Delta L_2 \quad KK1 = \frac{\Delta L_3}{\sin(\phi_3)} \quad MM1 = \frac{\Delta L_4}{\sin(\phi_4)} \quad (15.4).$$

Выражение (15.4) аналогично выражению (15.2).

Поскольку продольное усилие по длине стержня постоянно, то $\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$.

Для решения системы 4-х уравнений (трех уравнений совместности перемещений и одного уравнения равновесия) в Mathcad используем вычислительный блок **given-find** (рис. 15П.5). Включение двух параметров в функции ΔL и Δ связано с тем, что Mathcad не допускает наличия параметров с индексами в левой части выражения (в названии функции). Блоку given-find предшествует начальное приближение для всех искомых величин (4-х продольных усилий).

удлинения стержней перемещения шарниров

$$\Delta L(N, i) := \frac{N \cdot L_{CT_i}}{E \cdot A_i}$$

$$\Delta(N, i) := \frac{\Delta L(N, i)}{\sin(\phi_i)}$$

$$m := \text{rows}(A) \quad i := 1..m$$

Решение системы уравнений

$$N := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ кН}$$

начальные приближения

Given

уравнение равновесия

$$F \cdot L_F - \sum_{i=1}^m k_i \cdot N_i \cdot L_i \cdot \sin(\phi_i) = 0$$

уравнения совместности перемещений

$$\frac{\Delta(N_1, 1) \cdot k_1}{L_1} = \frac{\Delta(N_2, 2) \cdot k_2}{L_2}$$

$$\frac{\Delta(N_2, 2) \cdot k_2}{L_2} = \frac{\Delta(N_3, 3) \cdot k_3}{L_3}$$

$$\frac{\Delta(N_3, 3) \cdot k_3}{L_3} = \frac{\Delta(N_4, 4) \cdot k_4}{L_4}$$

$$N := \text{Find}(N_1, N_2, N_3, N_4)$$

Результаты расчета

$$N = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ кН}$$

$$\sigma := \frac{N}{A}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 27 \\ 54 \\ 40 \\ 81 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

$$\Delta L(N_i, i) = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.081 \\ 0.086 \\ 0.14 \end{pmatrix} \text{ мм}$$

Рис. 15П.5. Расчетные зависимости и результаты расчета шарнирно-стержневой системы

Для согласования знаков продольных усилий и перемещений при удлинении или укорочении стержней в уравнениях использован коэффициент k .

Для проверки правильности работы алгоритма задачи уберите два стержня, точнее, сделайте площадь поперечного сечения двух стержней ничтожно малой, например,

$A = 10^{-8} \text{ см}^2$, поменяйте знаки коэффициентов k , как бы меняя положение стержней (выше или ниже балки).

Поскольку расчеты ведутся с учетом размерностей, в начале программы введены производные размерности (на русском языке), а в численных ответах приходится вписывать нужную размерность вручную (в дополнительный черный квадратик ввода).

В рассмотренном примере все было известно и задача расчетчика свелась к проверке выполнения условия прочности $\max \sigma \leq [\sigma]$. Если условие прочности не выполняется, расчетчик может, изменяя исходные данные вручную (уменьшая нагрузку или увеличивая площади сечений) добиться его выполнения.

Если требуется определить допускаемую нагрузку из условия прочности, то ее можно найти из следующей пропорции

$$\frac{\max \sigma}{[\sigma]} = \frac{F}{[F]},$$

где F — действующая нагрузка, а $[F]$ — допускаемая нагрузка.

Если требуется подобрать размеры поперечных сечений стержней, то из условия прочности

$$\max \sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad \text{находим} \quad A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

ВНИМАНИЕ

Условие прочности одно и позволяет определить лишь одну неизвестную величину: либо одну силу, либо одну площадь сечения.

В рассмотренном примере стержни работают на растяжение или на сжатие. Следует иметь в виду, что расчетные формулы при растяжении или сжатии одни, а прочность материалов на растяжение или сжатие может быть различной. В таком случае проверку на прочность нужно делать отдельно для растянутых и для сжатых стержней, используя различные допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие.

ВНИМАНИЕ

Длинные, тонкие стержни не могут работать на сжатие. Они теряют устойчивость (сжатие сменяется изгибом — стержень выпучивается) при нагрузке в несколько раз меньше допускаемой.

Усложним расчет. Пусть на системы, кроме внешней силы, действует также изменение температуры и монтажная ошибка.

К исходным данным добавлены: изменение температуры Δt , коэффициент линейного расширения материала стержней α , монтажная ошибка Δ .

Чтобы учесть нагрев стержней и монтажную погрешность при сборке, суммарное удлинение стержня запишем в виде

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} + L \cdot \alpha \cdot \Delta t + \Delta_{\text{монт}}.$$

Других изменений по сравнению с предыдущей задачей нет. Расчетные зависимости, учитывающие изменение температуры и монтажную ошибку показаны на рис. 15П.6.

нагрев стержня

$$\Delta t := 20$$

$$\alpha := 12.5 \cdot 10^{-6}$$

монтажная погрешность

$$\Delta_{\text{монт}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{мм}$$

удлинения стержней

$$\Delta L(N, i) := \frac{N \cdot L_{\text{ст}_i}}{E \cdot A_i} + L_{\text{ст}_i} \cdot \alpha \cdot \Delta t + \Delta_{\text{монт}_i}$$

перемещения шарниров

$$\Delta(N, i) := \frac{\Delta L(N, i)}{\sin(\phi_i)} \quad m := \text{rows}(A) \\ i := 1..m$$

Решение системы уравнений

$$N := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} \quad \text{начальные приближения}$$

уравнение равновесия

$$\text{Given} \quad F \cdot L_F - \sum_{i=1}^m k_i \cdot N_i \cdot L_i \cdot \sin(\phi_i) = 0$$

уравнения совместности перемещений

$$\frac{\Delta(N_1, 1) \cdot k_1}{L_1} = \frac{\Delta(N_2, 2) \cdot k_2}{L_2}$$

$$\frac{\Delta(N_2, 2) \cdot k_2}{L_2} = \frac{\Delta(N_3, 3) \cdot k_3}{L_3}$$

$$\frac{\Delta(N_3, 3) \cdot k_3}{L_3} = \frac{\Delta(N_4, 4) \cdot k_4}{L_4}$$

$$N := \text{Find}(N_1, N_2, N_3, N_4)$$

Рис. 15П.6. Расчетные зависимости, учитывающие изменение температуры и монтажную погрешность

Для проверки расчетов положите $\Delta t = 0$ и $\Delta_{\text{монт}} = 0$. Результаты расчета будут соответствовать только действию внешних сил. Найдите отдельно напряжения от изменения температуры и отдельно от монтажной ошибки.

Казалось бы вредные монтажные ошибки дают возможность повышения прочности конструкции. Предусмотрев в конструкции возможность предварительного натяга стержней (путем затяжки болтов), то есть задавая конструктивно монтажный зазор, можно вызвать появление в стержнях дополнительных напряжений.

Эти напряжения, складываясь с рабочими напряжениями от внешней нагрузки, могут увеличить или уменьшить $\max \sigma$. Задача конструктора — выбрать оптимальную величину предварительного натяга стержней.

Пример 16. Расчет простейших соединений.

(Программа 16-soedin.mcd)

Этот пример слишком прост, чтобы использовать Mathcad для расчетов. Время, которое нужно потратить на составление программы гораздо больше, чем время расчета с помощью микрокалькулятора. Однако, если есть готовая программа, то стоит воспользоваться ею (рис. 16П.1 – 16П.3).

Расчет производится с учетом размерностей, поэтому в начале программы введены производные размерности. Далее заданы исходные данные для расчета: сила F и допускаемые напряжения на растяжение, срез и смятие (рис. 16П.1).

$$H := N \quad kH := 10^3 \cdot H \quad m := m \quad mm := 0.001 \cdot m \quad cm := 0.01 \cdot m \quad MPa := 10^6 \cdot \frac{H}{m^2}$$

нагрузка

Допускаемые напряжения

$$F := 10 \cdot kH$$

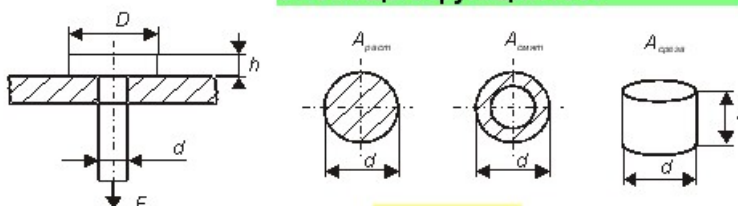
$$\sigma_{\text{раст}} := 100 \cdot MPa$$

$$\sigma_{\text{смят}} := 200 \cdot MPa$$

$$\tau_{\text{среза}} := 50 \cdot MPa$$

Расчет тяги

**Вычисление размеров сечений
путем решения условия прочности
с помощью функции root**



Расчет на растяжение

$$A(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$d := 1 \cdot cm$$

$$d := \text{root}\left(\frac{F}{A(d)} - \sigma_{\text{раст}}, d\right)$$

$$d = 11.284 \text{ мм}$$

Расчет на срез

$$A(h) := \pi \cdot d \cdot h$$

$$h := 1 \cdot cm$$

$$h := \text{root}\left(\frac{F}{A(h)} - \tau_{\text{среза}}, h\right)$$

$$h = 5.642 \text{ мм}$$

Расчет на смятие

$$A(D) := \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$D := 15 \cdot mm$$

$$D := \text{root}\left(\frac{F}{A(D)} - \sigma_{\text{смят}}, D\right)$$

$$D = 13.82 \text{ мм}$$

Рис. 16П.1 Расчет тяги

Далее расчет трех соединений: тяги, штифта, сварного шва на растяжение, срез, смятие.

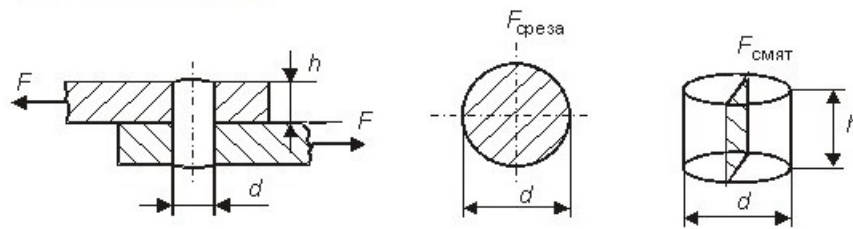
Форма условия прочности во всех случаях расчета одинакова. Оно приобретает вид равенства, так как Mathcad не выполняет численных расчетов с неравенствами.

Для решения равенства используется функция **root**, которая требует подстановки выражения, равного нулю, поэтому вместо условия прочности $\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]$ используется выражение $\sigma_{\text{max}} - [\sigma] = 0$.

В получившемся универсальном выражении (функции прочности) для каждого вида расчета надо ввести свой неизвестный размер, который нужно найти и вид допускаемого напряжения.

Перед каждым расчетом надо ввести свое выражение для площади поперечного сечения (растяжения, среза или смятия) как функцию от искомого размера.

Расчет штифта



Расчет на срез

$$A(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$d := 1 \cdot \text{см} \quad d := \text{root} \left(\frac{F}{A(d)} - \tau_{\text{среза}}, d \right) \quad d = 15.958 \text{ мм}$$

Расчет на смятие

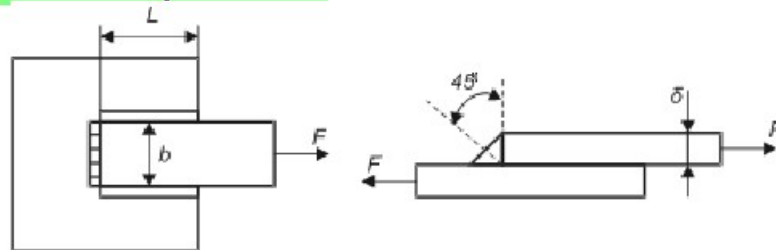
$$A(h) := h \cdot d$$

$$h := 0.1 \cdot \text{см} \quad h := \text{root} \left(\frac{F}{A(h)} - \sigma_{\text{смят}}, h \right) \quad h = 3.133 \text{ мм}$$

Рис. 16П.2 Расчет штифта

Расчет сварного шва

$$\delta := 5 \cdot \text{мм} \quad F := 100 \cdot \text{кН}$$



Расчет пластины на разрыв

$$A(b) := b \cdot \delta$$

$$b := 1 \cdot \text{см} \quad b := \text{root} \left(\frac{F}{A(b)} - \sigma_{\text{раст}}, b \right) \quad b = 200 \text{ мм}$$

Расчет на срез сварного шва

$$A(L) := \delta \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot (2 \cdot L + b)$$

$$L := 1 \cdot \text{см} \quad L := \text{root} \left(\frac{F}{A(L)} - \tau_{\text{среза}}, L \right) \quad L = 182.843 \text{ мм}$$

Рис. 16П.3 Расчет сварного шва

Каждому расчету предшествует начальное приближение неизвестной, которую надо определить.

Так как расчет ведется с учетом размерностей, то и начальное приближение надо задавать в виде произведения числа на размерность. Для получения результата в мм необходимо щелкнуть мышью на результате и в черный квадратик справа от числа вписать требуемую размерность (мм).

Пример 17. Кручение статически - определимого стержня.

(Программа 17-kruch1.mcd)

Рассмотрим пример расчета на кручение одного стержня, в котором будет учтено все сразу: различные по числу и величине моменты, различные длины участков и различные формы поперечных сечений.

Условная расчетная схема задачи приведена на рис. 17П.1. Условность схемы состоит в том, что на схеме показаны лишь один сосредоточенный момент M_i и один распределенный m_i , чтобы не загромождать схему большим количеством обозначений. Точно также была рассмотрена условная схема нагружения стержня при растяжении-сжатии.

В рассматриваемом далее примере стержень нагружен тремя сосредоточенными и двумя распределенными моментами, хотя число нагрузок может быть любым.

По форме поперечного сечения стержень разделен на три участка: круглый, кольцевой, прямоугольный, хотя число участков с различной формой поперечного сечения может быть любым.

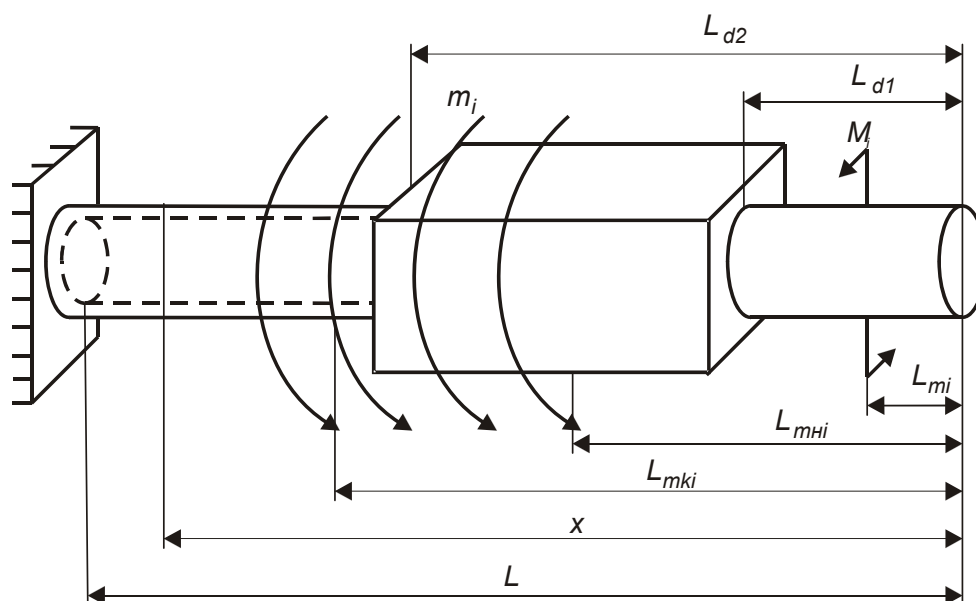


Рис. 17П.1. Условная расчетная схема нагружения стержня при кручении

На рисунке 17П.2 приведены исходные данные для расчета. Так как задача решается с учетом размерностей, в начале программы введены производные размерности на русском языке.

Далее единственная характеристика материала — модуль сдвига G для стали.

Затем — размеры поперечных сечений и границы участков с различными сечениями L_d , нагрузки: три сосредоточенных момента M и два распределенных m , координаты сечений, где они приложены: для сосредоточенных моментов L_M , для распределенных моментов указаны начало L_{mn} и конец нагрузки L_{mk} , полная длина стержня L , диапазон изменения значений координаты x .

В процессе работы с примером поменяйте любые исходные данные и посмотрите на результаты расчета.

град := deg m := m см := 0.01·m мм := 0.001·m

кН := 1000·N кНм := 1000·N·m Нм := N·m МПа := $10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$

Исходные данные

$G := 8 \cdot 10^4 \cdot \text{МПа}$ модуль сдвига

Размеры сечения

для круга

$D1 := 50 \cdot \text{мм}$

для кольца

$d := 40 \cdot \text{мм}$

$D := 50 \cdot \text{мм}$

$L := 1 \cdot \text{м}$

$L_d := \begin{pmatrix} 0.3 \cdot L \\ 0.7 \cdot L \end{pmatrix}$

для прямоугольного сечения

$b := 50 \cdot \text{мм}$

$h := 50 \cdot \text{мм}$

$hb := \frac{h}{b}$

Внешние моменты и координата их приложения

$M := \begin{pmatrix} 500 \\ 700 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot \text{Нм}$

$L_M := \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$

$x := 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} \dots L$

$m := \begin{pmatrix} -3000 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{Нм}}{\text{м}}$

$L_{mH} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$

$L_{mK} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$

Рис. 17П.2. Исходные данные к расчету стержня на кручение

Далее в программе записан алгоритм решения статически-определимой задачи.

Запись выражения для крутящего момента (рис. 17П.3) аналогична записи, использованной в примере 10, то есть с использованием булевых операторов условия записана сумма моментов, расположенных по одну сторону от сечения стержня.

Для учета распределенной нагрузки введено два выражения. Первое для нагрузки переменной интенсивности. Это интегральное выражение (голубого цвета), в которое входит функция интенсивности распределенной нагрузки по всей длине стержня (на рис. 17П.3 вверху слева). Второе выражение (желтого цвета) для нагрузки постоянной интенсивности. В нем распределенная нагрузка продолжена до конца стержня. Чтобы суммарная нагрузка не изменилась, приложена вторая нагрузка противоположного знака от сечения, где должна была закончиться первая нагрузка до конца стержня. Следует отметить, что расчет с учетом интегрального выражения продолжается раз в сто дольше, чем второго выражения (без интеграла). Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 17П.6.

Геометрические характеристики сечения: момент инерции при кручении J_K и момент сопротивления при кручении W_K записаны в виде функции с использованием оператора условия с панели программирования (рис. 17П.4). Такая форма записи условия наиболее наглядна. Фактически на экране виден перечень формул для использованных форм поперечного сечения.

Если у вашего стержня больше, чем три участка с различными сечениями, в операторы программирования надо добавить строки и ввести выражения для других форм поперечных сечений.

Для ввода дополнительной строки надо установить курсор в конец предыдущей строки, клавишей **Space** (пробел) выделить строку целиком, затем на панели программирования выбрать **Add Line**, в появившееся место ввода вписать новое выражение.

Определение крутящих моментов

$mm(x) := \begin{cases} m_1 & \text{if } L_{mH_1} \leq x \leq L_{mK_1} \\ m_2 & \text{if } L_{mH_2} \leq x \leq L_{mK_2} \\ \left(0 \cdot \frac{H_m}{m}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$

Все правильно и просто, но вычисление интеграла от интеграла (угол закручивания) просходит ну очень долго

$M_K(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i \cdot (x > L_{M_i}) + \int_0^x mm(x) dx$

Без интеграла расчет идет раз в 100 быстрее

$M_K(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i \cdot (x > L_{M_i}) + \left[\sum_{i=1}^{\text{rows}(m)} m_i \cdot (x - L_{mH_i}) \cdot (x > L_{mH_i}) - \sum_{i=1}^{\text{rows}(m)} m_i \cdot (x - L_{mK_i}) \cdot (x > L_{mK_i}) \right]$

Рис. 17П.3. Определение крутящего момента

Двойной щелчок мышью на этой линии раскрывает закрытую зону и закрывает раскрытую.

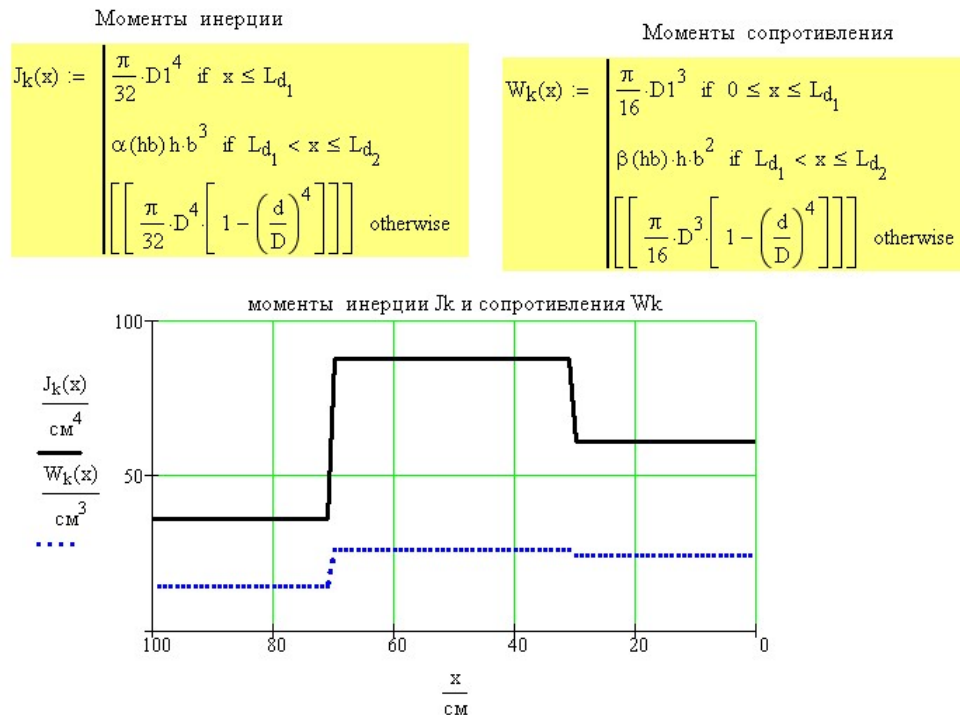


Рис. 17П.4. Определение момента инерции и момента сопротивления при кручении

Для определения момента инерции J_k и момента сопротивления W_k при кручении для стержня прямоугольного поперечного сечения необходимо задать коэффициенты α, β, γ , зависящие от отношения сторон прямоугольника b и h , где $b < h$. Для автоматизации расчетов в скрытой зоне помещен расчет этих коэффициентов. Исходная таблица коэффициентов превращена в функцию от соотношения сторон h/b с помощью функций интерполяции. Скрытая зона раскрыта и показана на рис. 17П.5.

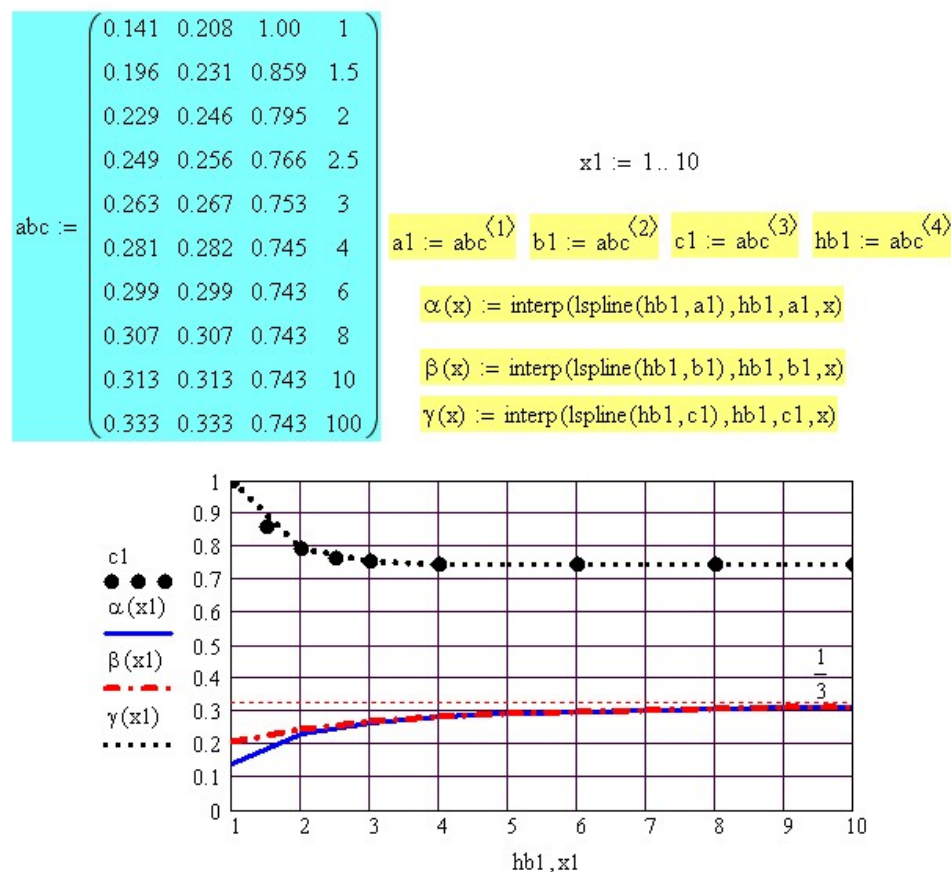


Рис. 17П.5. Определение коэффициентов для расчета момента инерции и момента сопротивления при кручении стержней прямоугольного сечения

Для расчета максимальных напряжений и углов поворота сечений стержня введены формулы для их вычисления (рис. 17П.6).

Обратите внимание, что поскольку угол поворота отсчитывается от неподвижной заделки, в выражении для угла поворота интеграл берется не от 0 до x , а от L до x .

$$\varphi(x) := \int_L^x \frac{M_k(x)}{G \cdot J_k(x)} dx$$

$$\tau_{\max}(x) := \frac{M_k(x)}{W_k(x)}$$

Поскольку угол поворота отсчитывается от неподвижной заделки, в выражении для угла поворота сечения интеграл берется не от 0 до x , а от L до x .

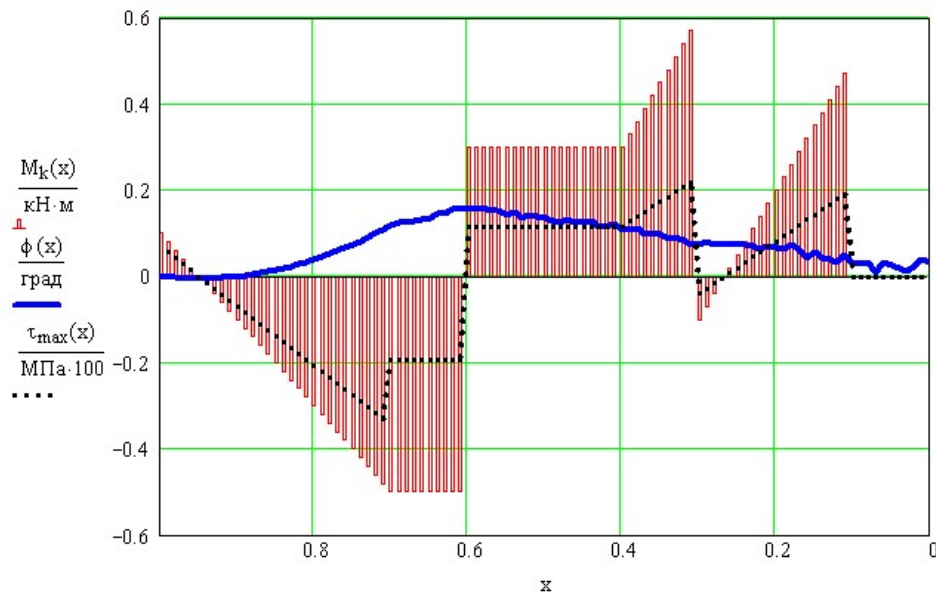


Рис. 17П.6. Результаты расчета статически-определимого стержня на кручение

Графики изменения угла поворота сечения φ и максимальных напряжений τ_{\max} приведены на рис. 17П.6. На этом же рисунке показана эпюра крутящих моментов (заштрихована).

Пример 18. Кручение статически - неопределимого стержня.

(Программа 18-kruch2.mcd)

Стальная труба длиной 1 метр, зашпеленная одним концом (правым), нагружена тремя парами сил M_i , приложенными в сечениях L_{Mi} . С левой стороны в сечении А наложено ограничение на угол поворота сечения. Задано $L_A = 0$ и $\phi_A = 0$, то есть в сечении А — жесткая заделка. В принципе это перемещение ϕ_A может быть любым, как и положение сечения А. В результате стержень стал статически-неопределимым при наложении на него дополнительной связи. Эта связь может быть жесткой или упругой, и наложена в любом сечении стержня. Расчетная схема трубы показана на рис. 18П.1. Исходные данные для расчета приведены на рис. 18П.2.

Условием прочности является $\tau_{\max} \leq [\tau]$, В расчете $[\tau]$ обозначено $\tau_{\text{доп}}$, так как для Mathcad квадратные скобки — это математический оператор. Условие жесткости $\phi_B \leq [\phi_B] = 0$. Таким образом, связь наложена в некотором сечении А, условие жесткости проверяется в другом сечении В.

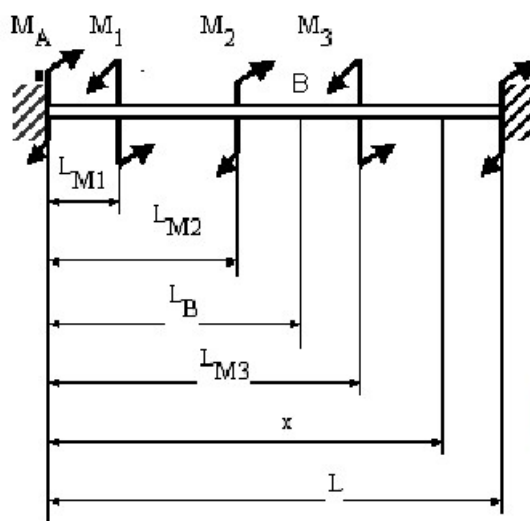


Рис. 18П.1. Расчетная схема статически-неопределимого стержня, работающего на кручение

$$m := m \quad H := N \quad kH := 1000 \cdot N \quad MPa := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$$

$$kNm := 1000 \cdot N \cdot m \quad Nm := N \cdot m \quad \text{град} := \text{deg}$$

Исходные данные

$$L := 1 \cdot m \quad G := 8 \cdot 10^4 \cdot MPa \quad \tau_{\text{доп}} := 50 \cdot MPa$$

Диаметр трубы (в первом приближении)
задан глобально ниже графика

$$\alpha := 0.9 \quad (\text{Труба } \alpha = d/D) \quad d := D \cdot \alpha$$

Пары сил и координаты их приложения

$$M := \begin{pmatrix} -500 \\ 700 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot Nm \quad L_M := \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot cm$$

Задаемся положением точки, где наложено ограничение L_A
и углом поворота ϕ_A в месте ее наложения

$$L_A := 0 \cdot m \quad \phi_A := 0 \cdot \text{град} \quad \text{в левой заделке} \quad \text{поменяйте}$$

Проверить условие жесткости в точке В L_A и ϕ_A

$$L_B := 50 \cdot cm \quad \phi_B := 0.3 \cdot \text{град} \quad L_B \text{ и } \phi_B$$

Рис. 18П.2. Исходные данные для расчета

Для проведения расчета надо записать геометрические характеристики сечения трубы, выражения для крутящего момента и угла поворота (рис. 18П.3). Поскольку

реакция наложенной связи M_A неизвестна, то она должна входить в параметры всех выражений, предшествующих ее определению. С учетом этого заново определяем выражения для крутящего момента, угла поворота и максимального касательного напряжения. Величину M_A определяем из уравнения неразрывности перемещений $\varphi(M_A, L_A) = \varphi_A$ с помощью функции **root** (рис. 18П.3).

Далее определяем диаметр трубы из расчетов на прочность и жесткость (рис. 18П.4). Поскольку в формулу для τ_{\max} входит максимальный крутящий момент $M_{\kappa, \max}$ для его нахождения использована подпрограмма F_{\max} , помещенная в скрытую зону. Эта подпрограмма уже использовалась ранее при определении внутренних усилий при изгибе (рис. 11П.6). Результаты расчета статически-неопределимой задачи на кручение приведены на рис.18П.5. Работая с примером поменяйте величину и положение наложенной связи и условие жесткости.

Геометрические характеристики

$$J_k(D) := \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4) \quad \text{момент инерции}$$

$$W_k(D) := \frac{\pi}{16} \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4) \quad \text{момент сопротивления}$$

$$A(D) := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (1 - \alpha^2) \quad \text{площадь сечения}$$

$$\text{Крутящий момент} \quad M_k(M_A, x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x > L_{M_i})] + M_A \cdot (x > L_A)$$

$$\text{Угол поворота} \quad \phi(D, M_A, x) := \int_L^x \frac{M_k(M_A, x)}{G \cdot J_k(D)} dx$$

$$\text{решение уравнения неразрывности деформаций} \quad \phi(L_A) - \phi_A = 0$$

$$M_A := 1 \cdot \kappa \text{Нм} \quad \text{начальное приближение}$$

$$M_R := \text{root}(\phi(D, M_A, L_A) - \phi_A, M_A) \quad M_R = 280 \text{ Нм} \quad x := 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} \dots L$$

Рис. 18П.3. Расчет на кручение статически неопределимого стержня

$$\text{Определение максимального крутящего момента } M_{\max} \quad M_k(x) := M_k(M_R, x)$$

Здесь скрыта программа F_{\max}



Поменяйте параметры поиска максимума

$$L_H := 0 \cdot \text{м} \quad L_K := L \quad N := 1000 \quad M_{\max} := F_{\max}(M_k, L_H, L_K, N)_1$$

$$\text{Возвращение к исходной размерности} \quad x_{M_{\max}} := \frac{F_{\max}(M_k, L_H, L_K, N)_2}{\kappa \text{Н}}$$

$$\text{Максимальный момент} \quad M_{\max} = 480 \text{ Нм}$$

$$\text{в сечении} \quad x_{M_{\max}} = 30.1 \text{ см}$$

$$\text{При } D = 5 \text{ см} \quad \tau_{\max}(D) := \frac{M_{\max}}{W_k(D)} \quad \tau_{\max}(D) = 57 \text{ МПа}$$

$$\text{Определение } D \text{ из условия прочности} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\text{доп}}$$

$$D_{\tau} := \text{root}(\tau_{\max}(D) - \tau_{\text{доп}}, D) \quad D_{\tau} = 5.22 \text{ см}$$

$$\text{Определение } D \text{ из условия жесткости} \quad \phi(D, L_B) \leq \phi_B$$

$$\phi(D, x) := \int_L^x \frac{M_k(z)}{G \cdot J_k(D)} dz \quad D := 5 \cdot \text{см} \quad \text{начальное приближение}$$

$$D_{\phi} := \text{root}(\phi(D, L_B) - \phi_B, D) \quad D_{\phi} = 4.87 \text{ см}$$

Выбираем диаметр, удовлетворяющий обоим условиям

$$D := \max(D_{\tau}, D_{\phi}) \quad D = 0.052 \text{ м}$$

Рис.18П.4. Расчет на кручение статически неопределимого стержня (продолжение)

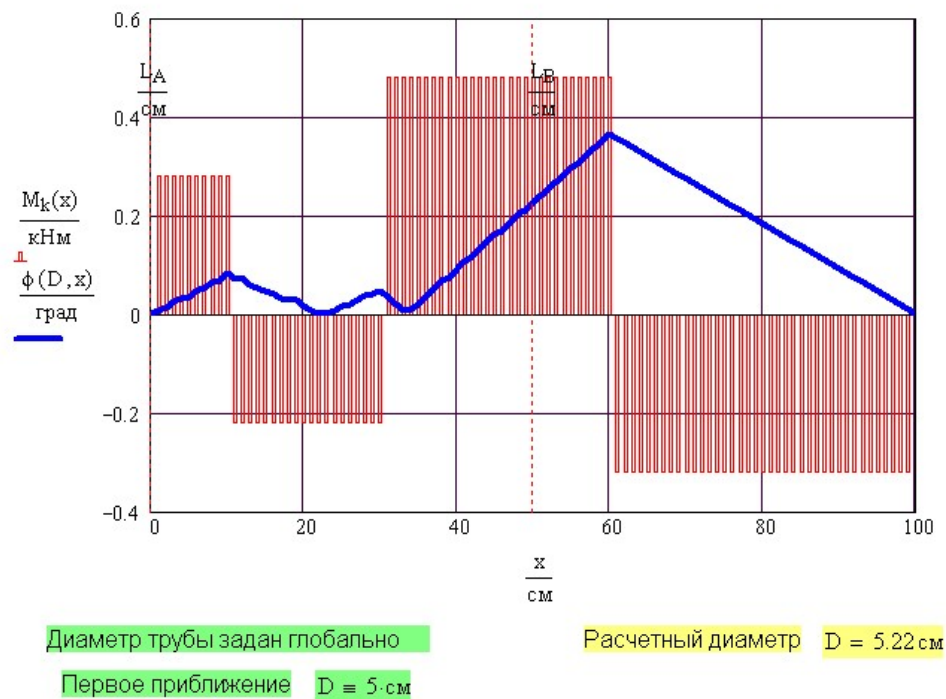


Рис. 18П.5. Результаты расчета статически-неопределимого стержня на кручение

Обратите внимание, что на всех графиках в этом примере ордината x изменяется от L до 0.

Так как начало координаты x взято на правом конце стержня, пришлось и на графиках изменить направление оси x . Для этого надо выделить график и в местах ввода по оси абсцисс ввести слева L , справа 0.

Пример 19. Расчет на изгиб консольной балки.

(Программа 19-izgib1.mcd)

Определим напряжения и перемещения в консольной балке, рассмотренной в примере 11 (Определение внутренних усилий при изгибе консольной балки). Схема балки и действующие на нее нагрузки показаны на рис. 11П.2.

В начале расчета надо определить внутренние усилия в балке и выбрать опасное сечение. Эта часть расчета является копией рассмотренного ранее примера 11 и приведена на рис. 11П.3 – 11П.6. Балка с нагрузками и эпюры внутренних усилий в ней показаны на рис. 19П.1.

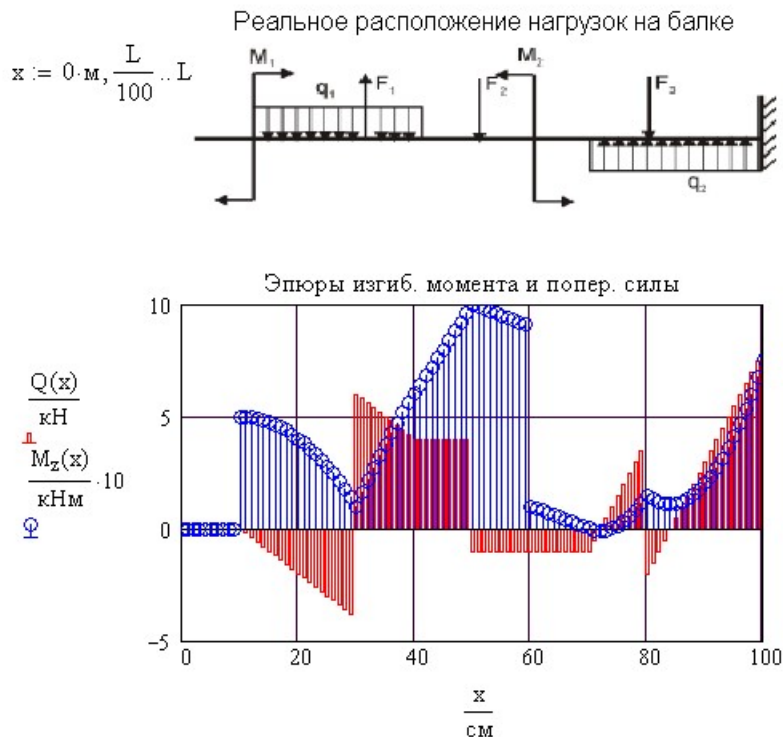


Рис. 19П.1. Эпюры внутренних усилий в заданной балке

Определение напряжений

Для определения напряжений необходимо знать момент инерции сечения балки. Определение его для заданного коробчатого сечения показано на рис. 19П.2. В принципе для этого можно использовать программы из примеров 6 и 7, но наш расчет более простой и нужные операторы включены в текст программы, ненужные удалены. На рис. 19П.2 приведен расчет только необходимого момента инерции относительно нейтральной (центральной) оси z .

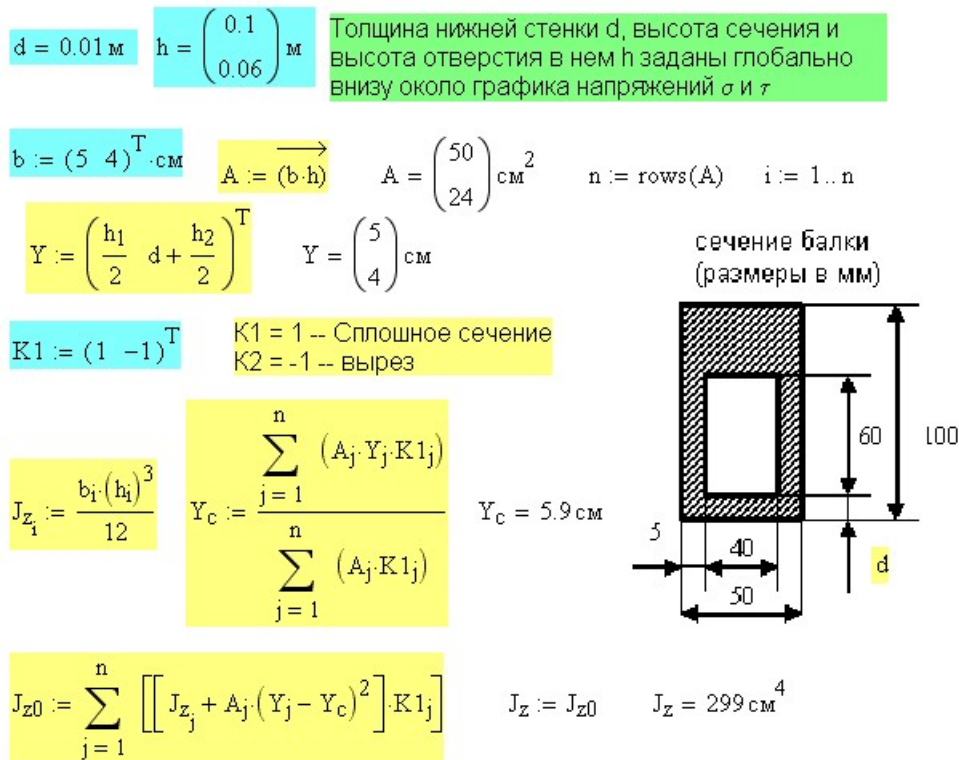


Рис. 19П.2 Расчет момента инерции составного сечения балки

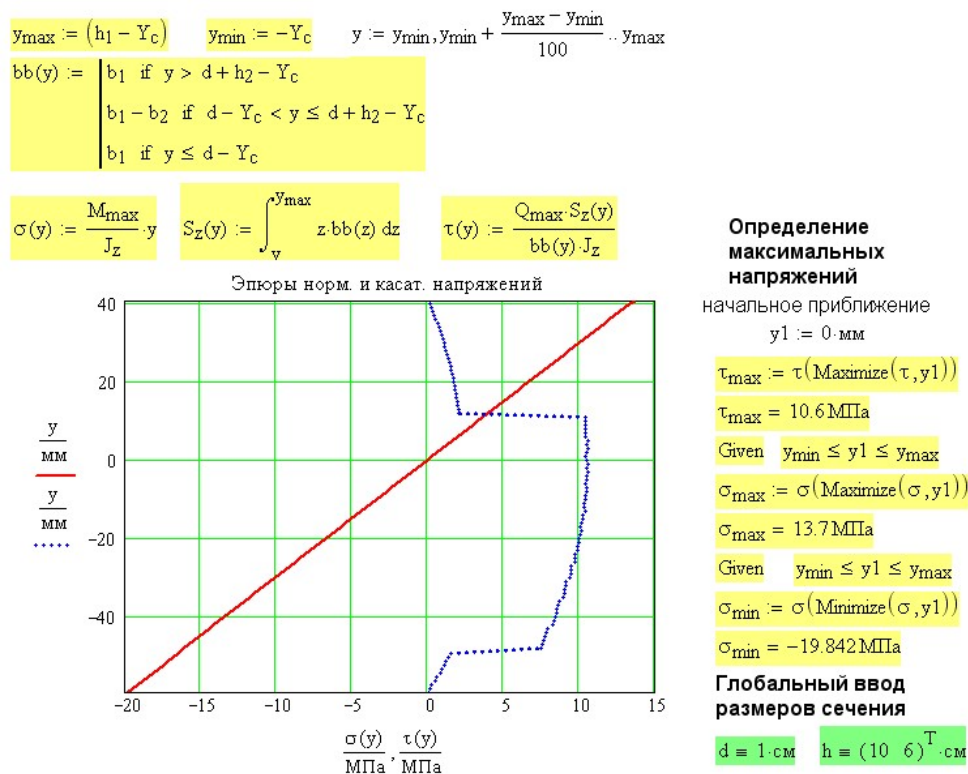


Рис. 19П.3. Расчет нормальных и касательных напряжений при изгибе балки

Расчет нормальных и касательных напряжений при изгибе балки показан на рис. 19П.3.

Самая сложная часть здесь объяснить Mathcad логически, что использовать в качестве ширины сечения bb в формуле касательных напряжений. Поскольку положение выреза в прямоугольном сечении произвольно, в условный оператор включены конкретные значения в см. При необходимости изменить форму или даже размеры сечения это оператор должен быть скорректирован. Эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте сечения балки показаны на том же рис. 19П.3. Экстремальные значения напряжений определены с помощью функций **maximize** и **minimize**, которые возвращают значение аргумента, при котором функция имеет экстремум. В примере эти функции непосредственно исполняют роль аргумента при поиске экстремума. Функция $\tau(x)$ имеет ярко выраженный безусловный экстремум. Функция $\sigma(x)$ линейная и безусловный экстремум для нее найти нельзя. Максимум и минимум функции определяются при задании ограничений на координату y .

Определение перемещений балки

Самый простой способ определения перемещений балки при изгибе — непосредственное интегрирование уравнения упругой линии. $EJ_z u''(x) = M_z(x)$. Этим способом Mathcad в состоянии определить перемещения почти любой балки (консольной или на двух опорах).

При решении дифференциального уравнения с помощью функции **odesolve** одно из граничных условий обязательно должно быть задано в начале интервала интегрирования, поэтому начало координат переносим в заделку, записав $x1 = L - x$. На рис. 19П.4 показано определение прогиба $u(x)$ и угла поворота сечения $\phi(x)$ для консольной балки. Граничные условия: прогиб и угол поворота в заделке (в начале интервала интегрирования) равны нулю.

Функция Odesolve не может работать с размерными величинами. В Mathcad 11 функцию Odesolve удастся "обмануть". Граничные условия и интервал интегрирования в блоке **given – odesolve** должны быть безразмерными. Результат на выходе $u(x)$ — величина безразмерная, хотя изгибающий момент, модуль Юнга и момент инерции в исходном уравнении величины размерные. Соответственно минимальный прогиб, определяемый функцией **minimize** также величина безразмерная. А вот графики перемещений построены с учетом размерностей. Дело в том, что любой график, в принципе, не приемлет размерность. Если в поле графика введено, например, $u(x)/\text{см}$, то для Mathcad это просто число, деленное на число.

ВНИМАНИЕ

В Mathcad 12 – 15 функция Odesolve не работает с размерными величинами.

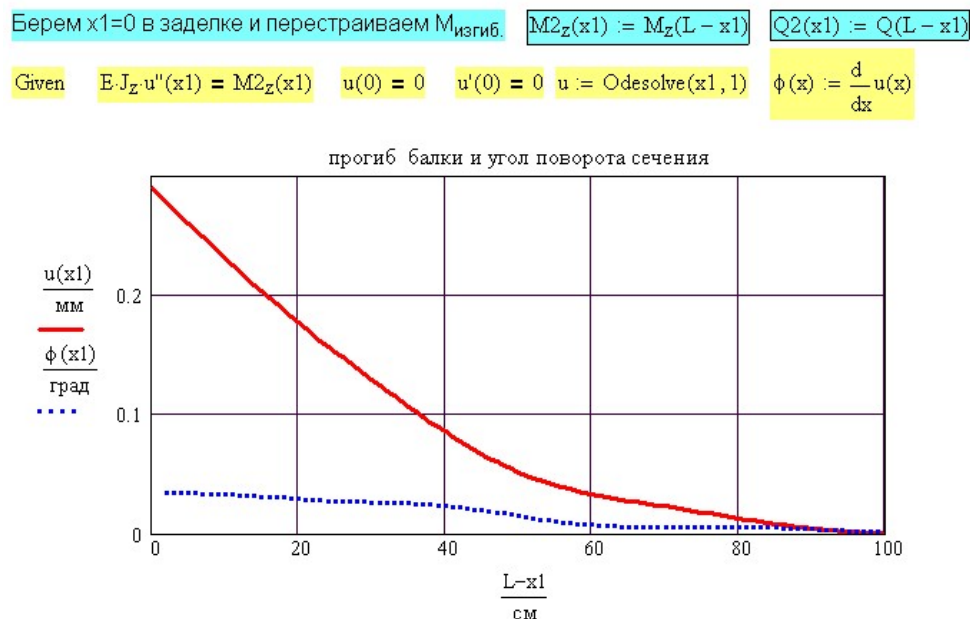


Рис. 19П.4. Определение прогиба $u(x)$ и угла поворота сечения балки $\phi(x)$ методом непосредственного интегрирования уравнения упругой линии для балки на двух опорах

Рассмотрим определение перемещений балки методом начальных параметров. На рис. 19П.5 сверху записано уравнение Крылова для прогибов консольной балки. Далее записано уравнение углов поворота сечений. Вот его писать уже не обязательно. Достаточно записать $\theta = du/dx$. Это выражение в программе отключено. Включите его. Результат не изменится, хотя скорость вычислений упадет. Поскольку в примере заделка находится справа, граничные условия $u(L) = 0$ и $\theta(L) = 0$. Результаты расчета перемещений полностью совпадают с приведенными на рис. 19П.4.

$$\begin{aligned}
 EJ u(x, u_0, \theta_0) &:= E J_z u_0 + E J_z \theta_0 x + \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} \left[M_i \frac{(x - L_{M_i})^2}{2} \cdot (x > L_{M_i}) \right] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} \left[F_i \frac{(x - L_{F_i})^3}{6} \cdot (x > L_{F_i}) \right] \dots \\
 &+ \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qH_i})^4}{24} \cdot (x > L_{qH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qK_i})^4}{24} \cdot (x > L_{qK_i}) \right] \\
 EJ \theta(x, u_0, \theta_0) &:= E J_z \theta_0 + \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} \left[M_i (x - L_{M_i}) \cdot (x > L_{M_i}) \right] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} \left[F_i \frac{(x - L_{F_i})^2}{2} \cdot (x > L_{F_i}) \right] \dots \\
 &+ \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qH_i})^3}{6} \cdot (x > L_{qH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qK_i})^3}{6} \cdot (x > L_{qK_i}) \right] \\
 EJ \theta(x, u_0, \theta_0) &:= \frac{d}{dx} EJ u(x, u_0, \theta_0) \quad \text{Включите это выражение (результат не изменится)} \\
 u_0 &:= 0 \text{ мм} \quad \theta_0 := 0 \text{ град} \quad \text{Given} \quad EJ u(L, u_0, \theta_0) = 0 \quad EJ \theta(L, u_0, \theta_0) = 0 \\
 \begin{pmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} &:= \text{Find}(u_0, \theta_0) \quad u_0 = 0.291 \text{ мм} \quad \theta_0 = -0.034 \text{ град} \quad x := 0, \frac{L}{100} \dots L \\
 u(x) &:= \frac{EJ u(x, u_0, \theta_0)}{E J_z} \quad \theta(x) := \frac{EJ \theta(x, u_0, \theta_0)}{E J_z} \quad \theta(x) := \frac{d}{dx} u(x) \quad \text{аналог предыдущего выражения}
 \end{aligned}$$

Рис.19П.5. Уравнения метода начальных параметров для консольной балки

Приведенная запись уравнений метода начальных параметров универсальна и позволяет определять перемещения при любых нагрузках на балку.

Определить перемещения балки при изгибе можно и универсальным энергетическим методом с помощью интеграла Мора.

При плоском поперечном изгибе балки можно использовать только одно слагаемое интеграла Мора, содержащее изгибающие моменты.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_{Fi} \bar{M}_i dx}{EJ}.$$

В этом выражении n — количество участков на балке, M_{Fi} — изгибающие моменты от всех внешних сил, уже найденные в этой программе, \bar{M}_i — моменты от единичной силы $\bar{F} = 1$ или $\bar{M} = 1$, приложенной в точке, где ищем перемещение в направлении предполагаемого перемещения.

Достоинство Mathcad в том, что изгибающий момент по всей длине балки записан в виде одной функции с помощью булевых операторов условия. Тем самым отпадает необходимость вычислять сумму интегралов по количеству участков.

Грузовая система со всеми внешними нагрузками для заданной балки показана на рис. 19П.1, а единичные системы для определения прогиба и угла поворота сечения балки показаны на рис. 19П.6.

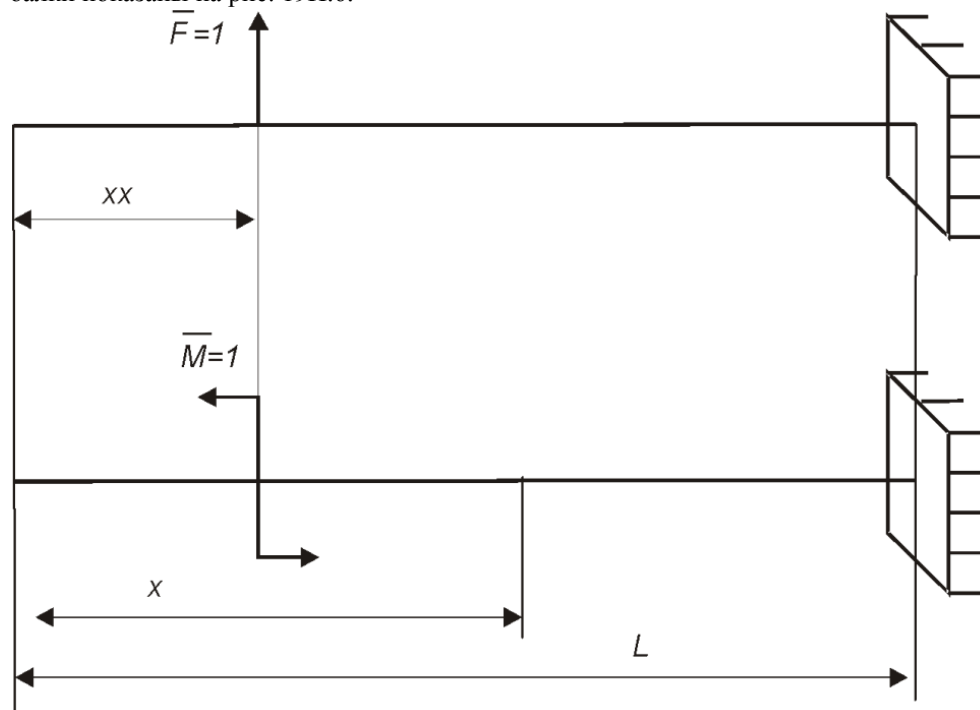


Рис.19П.6. Единичные системы для консольной балки

Единичная сила приложена в произвольном сечении xx . Тогда, задавая диапазон значений xx , можно определить перемещения по всей длине балки и построить графики перемещений.

Изгибающие моменты от единичных сил для консольной балки приведены на рис. 19П.7. Там же записаны интегралы Мора для определения прогиба и угла поворота сечения балки.

Единичная сила приложена в произвольном сечении xx . Тогда, задавая диапазон значений xx , можно определить перемещения по всей длине балки и построить графики перемещений.

момент от единичной силы для определения прогиба балки

$$M1(xx, x) := 1 \cdot (x - xx) \cdot (x > xx)$$

момент от единичной силы для определения угла поворота балки

$$M2(xx, x) := -1 \cdot (x \geq xx)$$

Прогиб балки

$$\Delta(xx) := \int_0^L \frac{M_z(x) \cdot M1(xx, x)}{E \cdot J_z} dx$$

$$\Delta(0 \text{ мм}) = 0.287 \text{ мм}$$

Угол поворота сечения

$$\Theta(xx) := \int_0^L \frac{M_z(x) \cdot M2(xx, x)}{E \cdot J_z} dx$$

$$\Theta(0 \text{ м}) = -0.033 \text{ deg}$$

Рис. 19П.7. Определение перемещений консольной балки

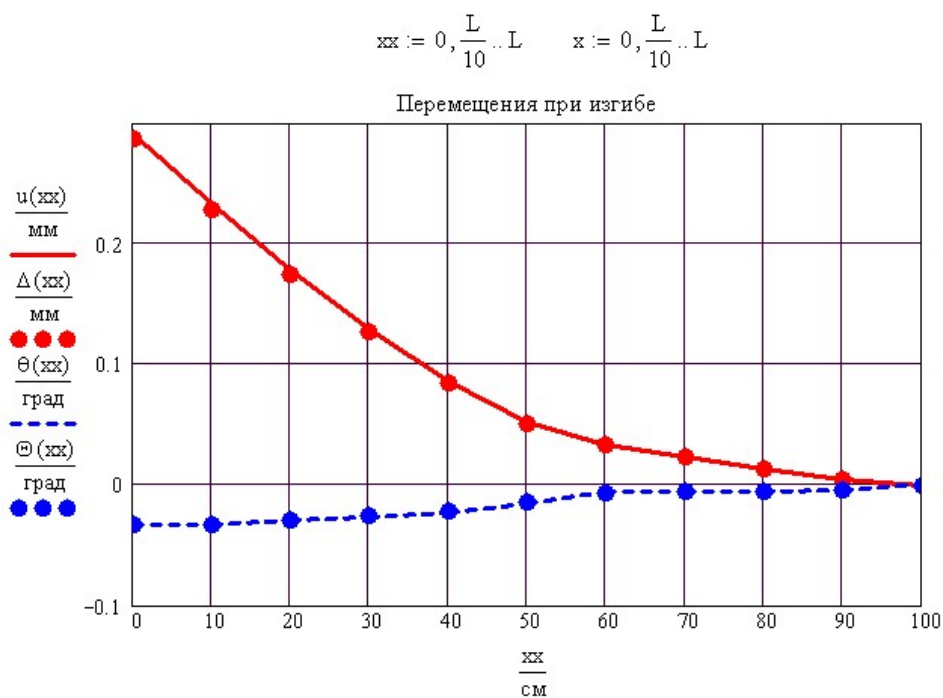


Рис. 19П.8 Результаты расчета перемещений консольной балки

Результаты расчета перемещений консольной балки показаны на рис. 19П.8. Точки на графике — результаты расчета с помощью интеграла Мора, сплошные линии — расчет методом начальных параметров.

Следует заметить, что вычисления интеграла Мора происходят во много раз медленнее, чем использование уравнения начальных параметров. Напомню, что вычисление интеграла самая медленная операция в Mathcad. В данной задаче интеграл вычисляется многократно для всех значений xx . Если же для записи изгибающего момента от распределенной нагрузки также использовать интегральное выражение, записанное в Примере 11 ([Определение внутренних усилий при изгибе консольной балки](#)), то вычисление интеграла от интеграла, будет продолжаться еще в несколько раз медленнее.

Пример 20. Расчет на изгиб балки на двух опорах.

(Программа 20-izgib2.mcd)

В этом примере определяются напряжения и перемещения в балке на двух опорах. Исходные данные к расчету и определение внутренних усилий при изгибе приведены в примере 12 ([Внутренние усилия при изгибе балки на двух опорах](#)). Балка с нагрузками и эпюры внутренних усилий в ней показаны на рис. 20.1.

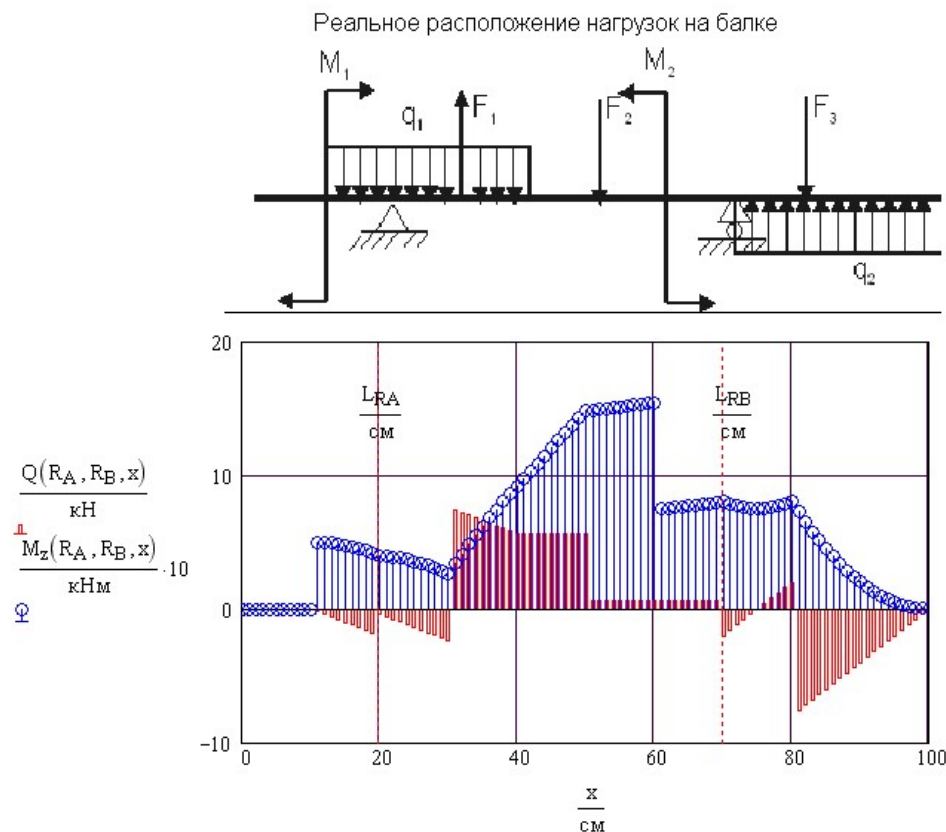


Рис. 20П.1. Балка на двух опорах и внутренние усилия в ней

В отличие от программы расчета консольной балки в выражениях для внутренних усилий в балке на двух опорах реакции опор являются неизвестными и, поэтому включены в параметры функций. Эти реакции определяются с помощью вычислительного блока [Given-Find](#) из условий равенства нулю изгибающего момента и поперечной силы на краю балки (при $x = L$). Определение внутренних усилий и опорных реакций для балки на двух опорах описаны в примере 12 и показаны на рис. 12П.1 – 12П.4.

Определение максимального изгибающего момента, определение напряжений в сечениях балки выполняются точно так же, как и в примере 19 (расчет на изгиб консольной балки) на рис. 19П.2 – 19П.4.

Перемещения балки на двух опорах можно найти теми же тремя способами, что и перемещения консольной балки, но есть особенности.

[Метод непосредственного интегрирования уравнения упругой линии](#) не может быть использован при определении перемещений балки с двумя консолями — а это как раз наш случай (рис. 20П.1). Как уже было сказано, функция *Odesolve* требует, чтобы хотя бы одно граничное условие было задано в начале участка интегрирования. Для балки с двумя консолями это условие не выполняется, поэтому определить перемещения такой балки методом непосредственного интегрирования уравнения упругой линии можно для всех участков балки, кроме одной из консолей. [Метод начальных параметров](#) работает отлично. Особенностью расчета является необходимость дополнительного включения в уравнение Крылова слагаемых, учитывающих влияние опорных реакций (рис. 20П.2). Начальные параметры u_0 и θ_0 определяются из граничных условий (равенство нулю прогиба балки на обеих опорах) путем решения системы уравнений с помощью вычислительного блока [Given — Find](#). Результаты расчета приведены на рис. 20П.5.

$$\begin{aligned}
 EJ u(x, u_0, \theta_0) &:= E J_z u_0 + E J_z \theta_0 \cdot x + \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} \left[M_i \frac{(x - L_{M_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{M_i}) \right] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} \left[F_i \frac{(x - L_{F_i})^3}{6} \cdot (x \geq L_{F_i}) \right] \dots \\
 &+ \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qH_i})^4}{24} \cdot (x \geq L_{qH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qK_i})^4}{24} \cdot (x \geq L_{qK_i}) \right] \dots \\
 &+ R_A \cdot \frac{(x - L_{RA})^3}{6} \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot \frac{(x - L_{RB})^3}{6} \cdot (x \geq L_{RB})
 \end{aligned}$$

$$EJ \theta(x, u_0, \theta_0) := E J_z \theta_0 + \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} \left[M_i (x - L_{M_i}) \cdot (x \geq L_{M_i}) \right] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} \left[F_i \frac{(x - L_{F_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{F_i}) \right] \dots$$

$$+ \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qH_i})^3}{6} \cdot (x \geq L_{qH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[q_i \frac{(x - L_{qK_i})^3}{6} \cdot (x \geq L_{qK_i}) \right] \dots$$

$$+ R_A \cdot \frac{(x - L_{RA})^2}{2} \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot \frac{(x - L_{RB})^2}{2} \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$M = \begin{pmatrix} 500 \\ -800 \end{pmatrix} \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{сек}^{-2}$$

$u_0 := 0 \text{ мм} \quad \theta_0 := 0$ **Given** $EJ u(L_{RA}, u_0, \theta_0) = 0$ $EJ u(L_{RB}, u_0, \theta_0) = 0$

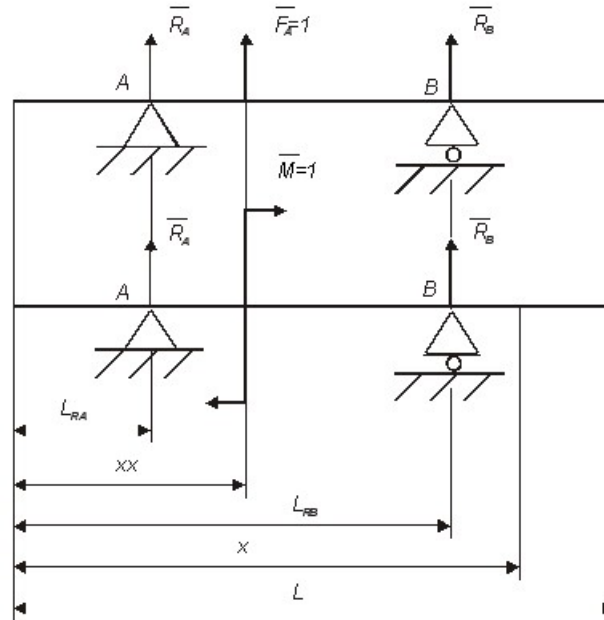
$\begin{pmatrix} u_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(u_0, \theta_0)$ $u_0 = 0.073 \text{ мм}$ $u(x) := \frac{EJ u(x, u_0, \theta_0)}{E J_z}$ $\theta(x) := \frac{EJ \theta(x, u_0, \theta_0)}{E J_z}$

+

Рис. 20П.2. Определение перемещений методом начальных параметров

Для вычисления **Интеграла Мора** $\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_{F_i} \bar{M}_i dx}{EJ}$ надо предварительно записать

выражения изгибающих моментов для грузовой и единичной систем. Грузовая система и изгибающие моменты в ней показаны на рис. 12П.2 – 12П.4. Единичные системы для определения прогиба балки и для определения угла поворота сечений приведены на рис. 20П.3. Определение моментов в них на рис. 20П.4. Реакции опор определены с помощью функции **Find** из условий равенства нулю в конце балки (при $x = L$) изгибающего момента и поперечной силы. На этом же рис. 20П.4 внизу записаны выражения для интеграла Мора. Результаты расчета приведены на рис. 20П.5. Точки на графике — результаты расчета с помощью интеграла Мора, сплошные линии — расчет методом начальных параметров. На рис. 20П.2 приведены графики изменения прогиба и угла поворота сечения вдоль оси балки.



Единичная сила приложена в произвольном сечении **xx**. Тогда, задаваясь диапазоном значений **xx**, можно определить перемещения по всей длине балки и построить графики перемещений.

Рис.20П.3. Единичные системы для балки на двух опорах

момент от единичной силы для определения прогиба балки

$$M1(R_A, R_B, xx, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB}) + 1 \cdot (x - xx) \cdot (x > xx)$$

определение опорных реакций

$$Ra1 := 1 \quad Rb1 := 1 \quad \text{начальные приближения}$$

$$\text{Given} \quad M1(Ra1, Rb1, xx, L) = 0 \quad 1 + Ra1 + Rb1 = 0$$

$$Rab(xx) := \text{Find}(Ra1, Rb1) \quad Ra1(xx) := Rab(xx)_1 \quad Rb1(xx) := Rab(xx)_2$$

момент от единичной силы для определения угла поворота балки

$$M2(R_A, R_B, xx, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB}) + 1 \cdot (x \geq xx)$$

определение опорных реакций

$$Ra2 := \frac{1}{L} \quad Rb2 := \frac{1}{L} \quad \text{начальные приближения}$$

$$\text{Given} \quad M2(Ra2, Rb2, xx, L) = 0 \quad Ra2 + Rb2 = 0$$

$$Rab2(xx) := \text{Find}(Ra2, Rb2) \quad Ra2(xx) := Rab2(xx)_1 \quad Rb2(xx) := Rab2(xx)_2$$

Прогиб балки

$$\Delta(L_{RA}) = 0 \text{ мм}$$

$$\Delta(L_{RB}) = 0 \text{ мм}$$

Угол поворота сечения

$$\Theta(L_{RA}) = 0.018 \text{ deg}$$

$$\Delta(xx) := \int_0^L \frac{M_z(R_A, R_B, x) \cdot M1(Ra1(xx), Rb1(xx), xx, x)}{E \cdot J_z} dx$$

$$\Theta(xx) := \int_0^L \frac{M_z(R_A, R_B, x) \cdot M2(Ra2(xx), Rb2(xx), xx, x)}{E \cdot J_z} dx$$

Рис. 20П.4 Определение перемещений балки на двух опорах с помощью интеграла Мора

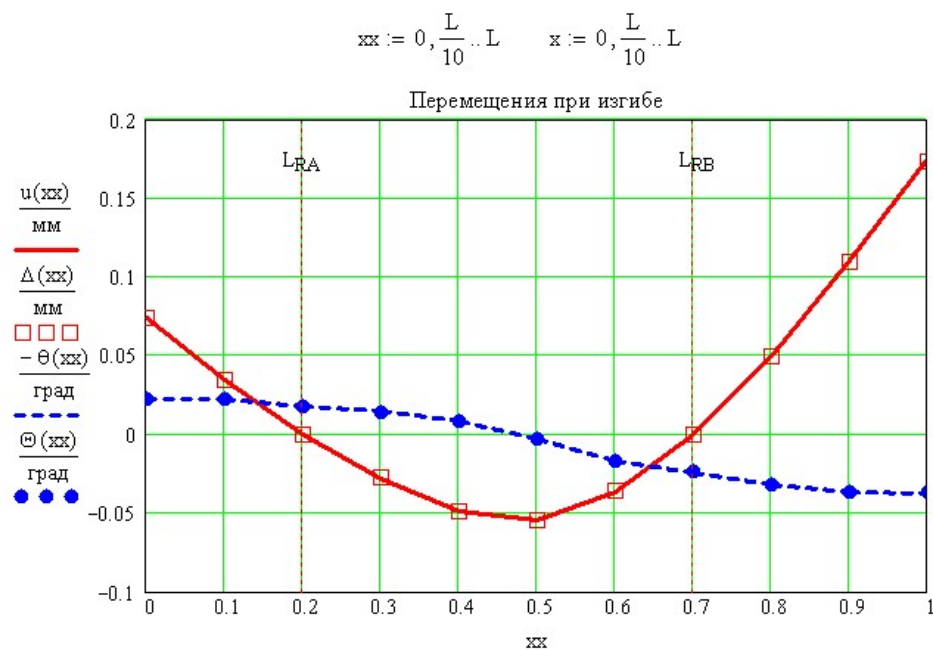


Рис. 20П.5. Результаты расчета перемещений при изгибе балки на двух опорах

Результаты расчета перемещений балки в Mathcad методом начальных параметров и с помощью интеграла Мора абсолютно совпадают.

Пример 21. Расчет балок на упругом основании.

70

(Программа 21-izgib3.mcd)

Дифференциальное уравнение упругой линии балки на упругом основании

$u^{IV} + \frac{kb}{EJ_z} u = \frac{q}{EJ_z}$ может быть решено в Mathcad с помощью функции Odesolve.

Достаточно ввести выражения для коэффициентов этого уравнения.

Рассмотрим примеры решения задачи в Mathcad.

На рис. 21П.1 приведены исходные данные для расчета. Модуль Юнга для стальной балки, ширина b и высота h прямоугольного поперечного сечения, длина балки L , Коэффициент постели упругого основания kk . Смысл величин a и L_F будет пояснен далее.

Расчет ведется без учета размерностей, так как функция Odesolve не работает с размерными величинами

Исходные данные

$$\begin{aligned} E &:= 2 \cdot 10^{11} & b &:= 0.20 & h &:= 0.02 & L &:= 2 & a &:= 0.1 & L_F &:= 0.95 & J &:= \frac{b \cdot h^3}{12} \\ kk &:= 5 \cdot 10^7 & & & & & & & & & & & & \end{aligned}$$

коэффициент упругого основания

Рис. 21П.1. Исходные данные для расчета балок на упругом основании.

Функция **odesolve** не может работать с размерными величинами, поэтому расчеты ведутся без учета размерностей. Все исходные данные введены в системе СИ, то есть в ньютонах и в метрах.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки на упругом основании содержит в правой части только выражение для распределенной нагрузки и нет выражений для сосредоточенных сил и пар сил. Чтобы учесть влияние сосредоточенных сил, заменим их распределенной нагрузкой, действующей на малом участке длиной a . Эта операция выполнена на рис. 21П.2, где задана внешняя сила F , приложенная посередине балки и определена интенсивность распределенной нагрузки qq , заменяющей эту силу. Там же введено расстояние от левого края балки до начала распределенной нагрузки L_F .

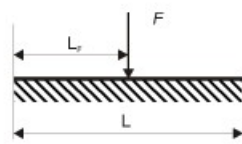
С помощью условных операторов записана единая для всей балки функция изменения интенсивности распределенной нагрузки $q(x)$. По всей длине балки, кроме участка, где приложена сила, распределенная нагрузка должна быть равна нулю. Однако пришлось задать ничтожно малую распределенную нагрузку, так как иначе функция **odesolve** выдает ошибку.

Приходится учитывать, что решение дифференциального уравнения 4-го порядка чрезвычайно сложно даже для Mathcad.. Для численного решения нашего уравнения приходится задавать большое число шагов (1000 или даже 10000). Если поставить число шагов, равным 100, решение пропадает. Даже при большом числе шагов в отдельных точках Mathcad не может найти решение. В этих случаях отсутствуют точки на графиках.

Далее записан блок решения дифференциального уравнения **given – odesolve**, внутри которого записано дифференциальное уравнение четвертого порядка и к нему четыре граничных условия. Ввиду замены сосредоточенных нагрузок распределенными поперечная сила и изгибающий момент, то есть вторая и третья производные от прогиба, на концах балки равны нулю.

Количество нагрузок, действующих на балку может быть любым. На рисунке 21П.3 приведен расчет балки на сплошном упругом основании, нагруженной 3-мя силами. Каждая сила заменена распределенной нагрузкой, действующей на малом участке длиной a .

С помощью условных операторов записана единая функция $q(x)$ изменения интенсивности распределенной нагрузки по длине балки. Далее записан блок решения дифференциального уравнения **given – odesolve** также, как на рис. 21П.2, и приведены результаты расчета.



$$F := -4000 \quad qq := F \cdot \frac{1}{b \cdot a} \quad qq = -200000$$

$$q(x) := \begin{cases} qq & \text{if } L_F \leq x \leq L_F + a \\ 100 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Given $u''''(x) + \frac{kk \cdot b}{E \cdot J} \cdot u(x) = \frac{q(x)}{E \cdot J}$ $u'''(0) = 0$ $u''(0) = 0$ $u'''(2) = 0$ $u''(2) = 0$

перемещение

изгибающий момент

поперечная сила

$u := \text{Odesolve}(x, 2, 1000)$ $M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x)$ $Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)$ $x := 0, 0.02 \dots L$

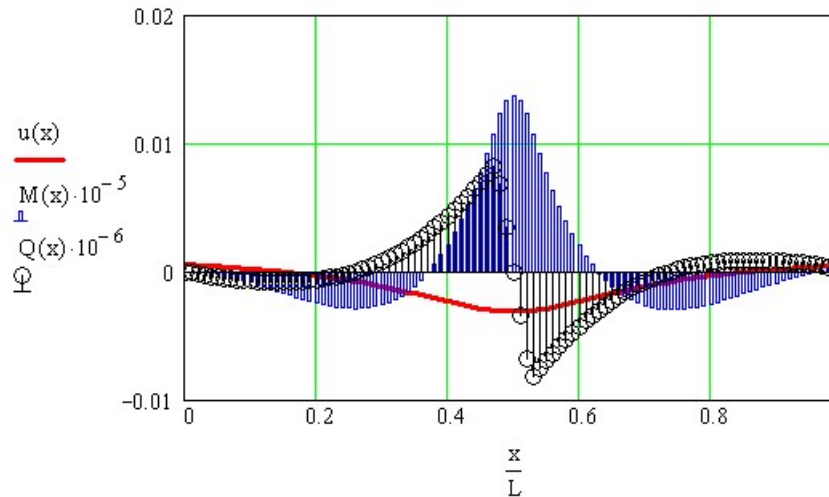
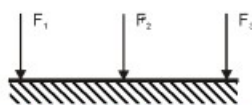


Рис. 21П.2. Прогиб $u(x)$, изгибающий момент $M(x)$ и поперечная сила $Q(x)$ для балки с одной силой посередине на сплошном упругом основании



$$F := \begin{pmatrix} -2000 \\ -4000 \\ -2000 \end{pmatrix}$$

$$qq := F \cdot \frac{1}{b \cdot a} \quad L_F := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.95 \\ 1.9 \end{pmatrix}$$

$$q(x) := \begin{cases} qq_1 & \text{if } L_{F_1} \leq x \leq L_{F_1} + a \\ qq_2 & \text{if } L_{F_2} \leq x \leq L_{F_2} + a \\ qq_3 & \text{if } L_{F_3} \leq x \leq L_{F_3} + a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Given $u''''(x) + \frac{kk \cdot b}{E \cdot J} \cdot u(x) = \frac{q(x)}{E \cdot J}$ $u'''(0) = 0$ $u''(0) = 0$ $u'''(2) = 0$ $u''(2) = 0$

$u := \text{Odesolve}(x, 2, 10000)$

$M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x)$ $Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)$

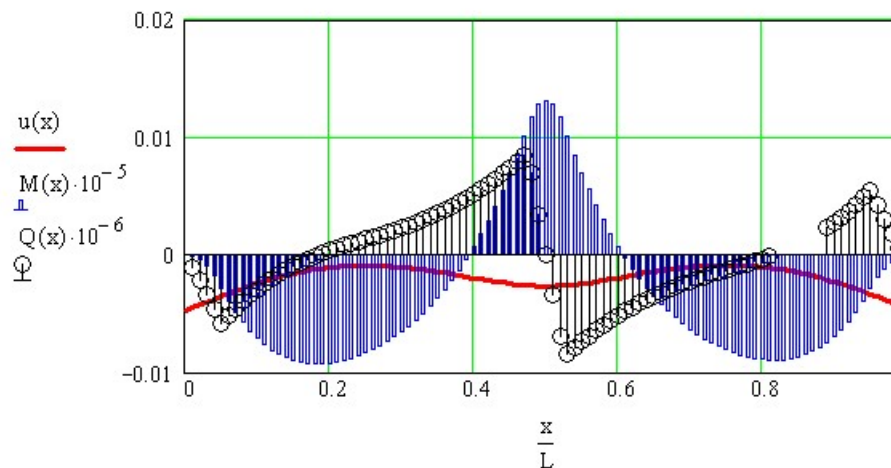


Рис. 21П.3. Расчет балки с тремя силами на сплошном упругом основании

Упругое основание может быть сплошным (от начала до конца балки), а может быть прерывистым в виде нескольких участков опирания балки на основание.

На рисунке 21П.4 приведен расчет балки на упругом основании с тремя силами и двумя участками упругого основания. Положение этих участков и их длина может быть любой.

В нашем примере вектор L_r задает положение начала и конца каждого участка упругого основания. Так первое основание от $x = 0,2$ м до $x = 0,4$ м. второе основание от 1,6 м до 1,8 м.

Коэффициент постели kk принят одинаковым для обоих участков и записан в виде единой функции с помощью условных операторов. Результаты расчета приведены на рис. 21П.4.

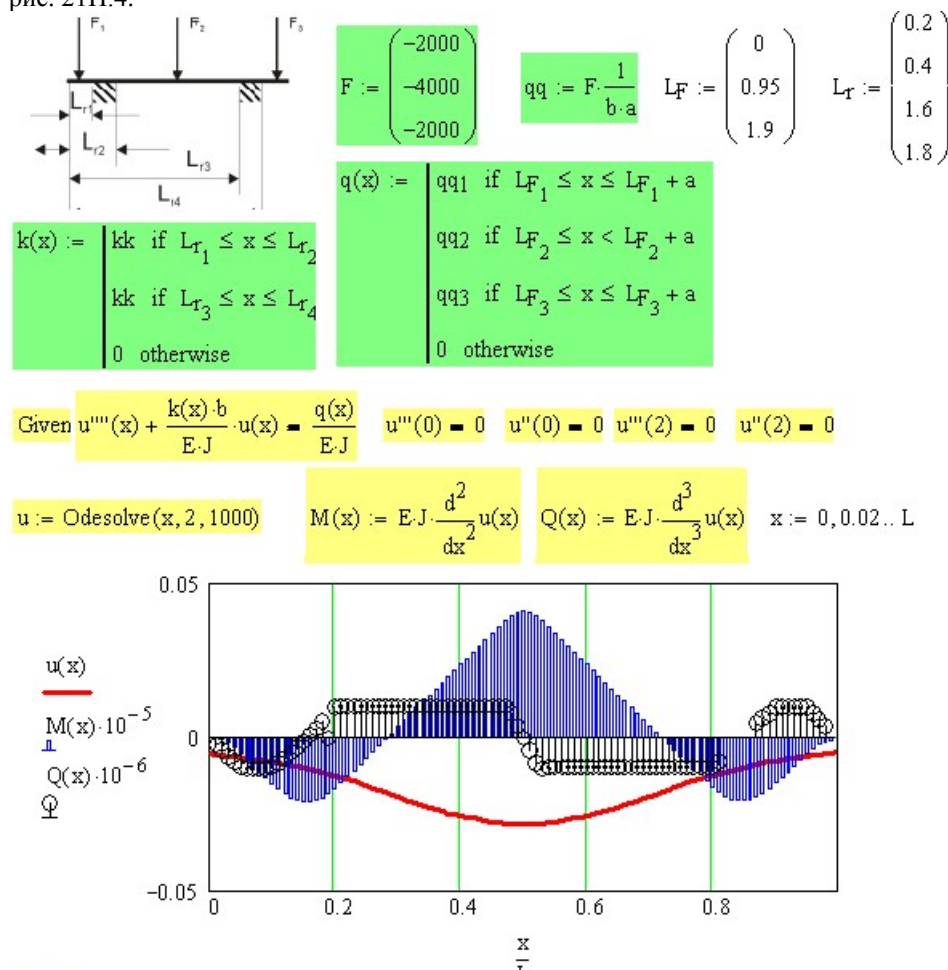


Рис. 21П.4. Расчет балки с тремя силами и двумя участками упругого основания

Приведенные примеры показывают, что Mathcad в состоянии определить прогибы балки и усилия в ней почти для любой произвольно взятой балки на упругом основании. Правда в некоторых случаях добиться получения правильных результатов расчета непросто.

Итерационные методы решения уравнений очень чувствительны к выбору начальных приближений, в нашем случае к выбору граничных условий. Обязательным условием является задание большого числа шагов (чем больше, тем точнее расчет). Тем не менее в ряде итераций имеет место деление на машинный ноль. Чтобы уменьшить число таких сбоев, иногда полезно нули в исходных данных заменить малыми величинами, как в функции $q(x)$ на рис. 21П.2.

Простота расчета балок на упругом основании в Mathcad поражает. Достаточно сравнить приведенные расчеты с тем, что имеется в литературе по данному вопросу. Рекомендательный в книгах для подобных расчетов метод начальных параметров необычайно сложен и позволяет решить лишь ограниченный круг задач.

Пример 22. Учет пластических деформаций при растяжении-сжатии.

(Программа 22-plast1.mcd)

В статически неопределимых задачах под действием пластических деформаций происходит перераспределение напряжений, что ведет к изменению условий равновесия системы.

Поскольку именно напряжение зависит от деформации, а не наоборот, при расчетах в упругопластической области целесообразно задаваться не нагрузкой, а деформацией или связанным с ней перемещением. Как будет видно из расчета, с ростом пластической деформации нагрузка может возрастать лишь в очень ограниченных пределах. Задаваясь нагрузкой, можно просто не получить никакого ответа в расчетах.

Поскольку результат расчета зависит от вида аппроксимации диаграммы деформирования материала, укажем вначале основные виды такой аппроксимации. Это понадобится при рассмотрении примеров 22, 23, 24, 55.

Виды аппроксимации диаграммы деформирования материала

При расчетах в области упругопластических деформаций связь между напряжениями и деформациями описывается не законом Гука, а уравнением диаграммы деформирования. Для получения такого уравнения используются следующие виды аппроксимации диаграммы деформирования.

- Диаграмма деформирования идеального жесткопластического тела, представляющую собой одну горизонтальную линию $\sigma = \sigma_T$ (рис. 22П.1, а).

При $\sigma < \sigma_T$ деформация $\varepsilon = 0$, то есть материал считается абсолютно жестким (недеформируемым). При $\sigma = \sigma_T$ деформация $\varepsilon \rightarrow \infty$.

- Диаграмма идеального упругопластического тела (диаграмма Прандтля) (рис. 22П.1) с бесконечно длинной площадкой текучести (рис. 22П.1, б).

При $\varepsilon < \varepsilon_T$ $\sigma = E \cdot \varepsilon$,

При $\varepsilon \geq \varepsilon_T$ $\sigma = \sigma_T$

- Диаграмма упругопластического тела с линейным упрочнением (рис. 22П.1, в).

При $\varepsilon < \varepsilon_T$ $\sigma = E \cdot \varepsilon$,

При $\varepsilon \geq \varepsilon_T$ $\sigma = \sigma_T + E_1 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_T)$,

Где E_1 — модуль упрочнения;

- Диаграмма упругопластического тела со степенным упрочнением (рис. 22П.1, г).

При $\varepsilon < \varepsilon_T$ $\sigma = E \cdot \varepsilon$,

При $\varepsilon \geq \varepsilon_T$ $\sigma = \sigma_T + A \cdot \varepsilon^m$,

Где A и m — эмпирические коэффициенты.

Все 4 вида аппроксимации диаграммы деформирования материала показаны на рис. 22П.1.

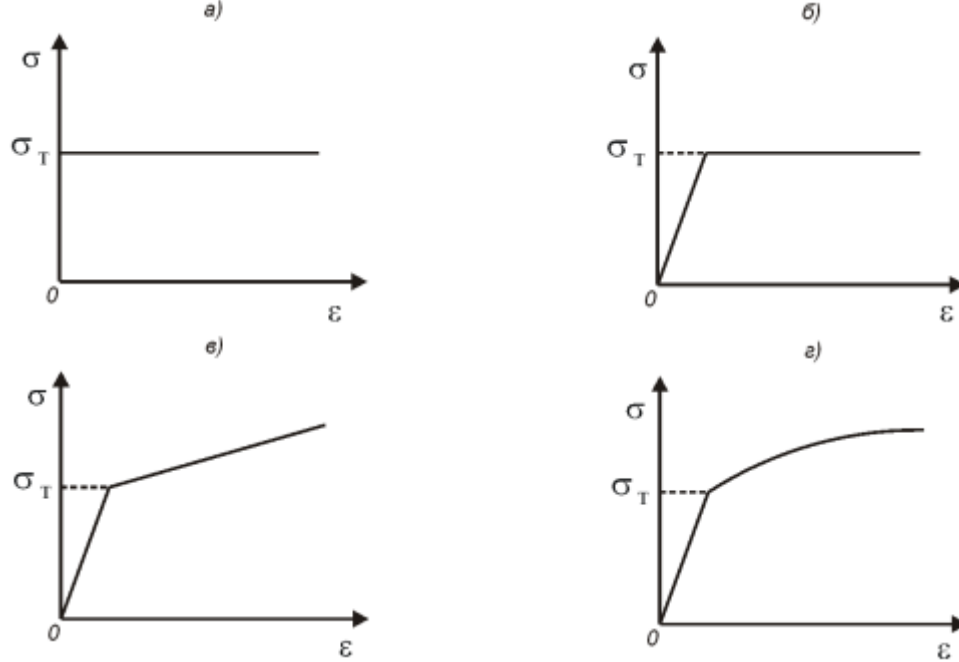


Рис. 22П.1. Виды аппроксимации диаграммы деформирования

Рассмотрим пример определения нагрузки, соответствующей заданной деформации статически неопределимой стержневой системы, изображенной на рис. 22П.2. В упругой постановке напряжения в стержнях и перемещения этой системы определены в примере 15. В исходных данных, приведенных на рис. 22П.3, отсутствует величина силы F , зато присутствует координата точки ее приложения L_F .

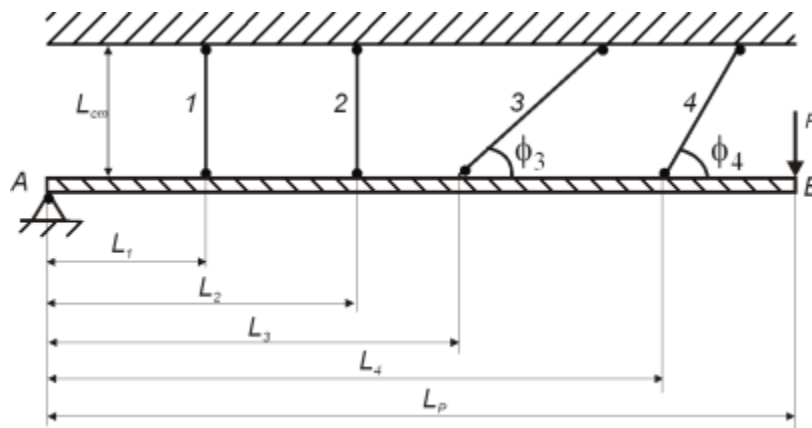


Рис. 8.2. Схема шарнирно-стержневой системы

$$\text{град} := \text{deg} \quad \text{мм} := 0.001 \cdot \text{м} \quad \text{см} := 0.01 \cdot \text{м} \quad \text{кН} := 1000 \cdot \text{Н} \quad \text{МПа} := 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Исходные данные

$$E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} \quad \sigma_T := 394 \cdot \text{МПа} \quad \sigma_{\text{доп}} := 100 \cdot \text{МПа}$$

$$F := 0 \cdot \text{кН} \quad L_F := 100 \cdot \text{см}$$

$$L := \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad \phi := \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 45 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{град} \quad A := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \text{см}^2$$

$$L_{\text{CT}} := \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ \frac{30}{\sin(\phi_3)} \\ \frac{30}{\sin(\phi_4)} \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad k := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 22П.3. Исходные данные к расчету шарнирно-стержневой системы

Обозначим δ — перемещение точки приложения силы. Задаваясь величиной δ , найдем, соответствующие ей деформации стержней и возникающие в них напряжения. Зная напряжения, из уравнений равновесия системы найдем вызывающую их силу F (рис. 22П.4).

Для заданного перемещения δ точки приложения силы F , находим из подобия треугольников (рис. 15П.4) перемещения $\Delta(\delta)$ точек крепления стержней к жесткой балке (шарниров).

По методу засечек из треугольников перемещения шарниров находим удлинения стержней $\Delta L(\delta)$.

Зная удлинения, определяем деформацию каждого стержня $\varepsilon(\delta)$.

Найдя деформации, определяем напряжения $\sigma(\delta)$ в стержнях.

Расчетные формулы приведены на рис. 22П.4.

δ - перемещение точки приложения силы

$$\delta := 0 \cdot \text{см}, 0.5 \cdot \text{см} \dots 10 \cdot \text{см}$$

$$\Delta(\delta) := \frac{\delta}{L_F} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_T := \frac{\sigma_T}{E}$$

$$\Delta L(\delta) := \overrightarrow{(\Delta(\delta) \cdot \sin(\phi))}$$

$$\varepsilon(\delta) := \overrightarrow{\left(\frac{\Delta L(\delta)}{L_{CT}} \right)}$$

$$\sigma(\delta, kk, i) := \begin{cases} E \cdot \varepsilon(\delta)_i & \text{if } \varepsilon(\delta)_i \leq \varepsilon_T \\ \text{otherwise} \end{cases}$$

упругая деформация

otherwise

$$\sigma_T \text{ if } kk = 1$$

диаграмма Прандтля

$$\left[(394 + 2633 \cdot \varepsilon(\delta)_i) \cdot \text{МПа} \right] \text{ if } kk = 2$$

линейное упрочнение

$$\left[368 + 1540 \cdot (\varepsilon(\delta)_i)^{0.731} \right] \cdot \text{МПа} \text{ if } kk = 3$$

степенное упрочнение

$$N(\delta, kk, i) := (\sigma(\delta, kk, i) \cdot A_i) \quad \text{продольные усилия в стержнях}$$

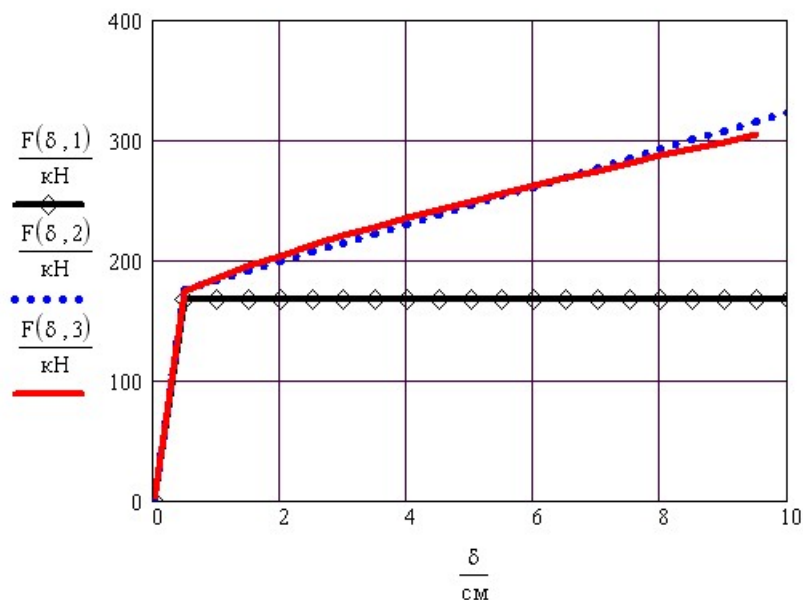
$$F(\delta, kk) := \frac{\sum_{i=1}^{\text{rows}(A)} k_i \cdot N(\delta, kk, i) \cdot L_i \cdot \sin(\phi_i)}{L_F}$$

предельная нагрузка

Рис. 22П.4. Определение нагрузки на шарнирно-стержневую систему, вызывающей заданное перемещение δ точки приложения силы F

Связь между напряжением и деформацией зависит от принятой формы аппроксимации диаграммы деформирования. На рисунке 22П.4 выражение для напряжений с помощью условных операторов записано сразу для трех форм аппроксимации. В параметры функции напряжений $\sigma(\delta, kk, i)$ введен указатель выбранной аппроксимации kk и номер стержня i , для которого определяется напряжение. Получение аппроксимирующего выражения для диаграммы деформирования с помощью функций регрессии показано в примере 43 (рис. 43П.6). По напряжениям были найдены продольные усилия в стержнях $N(\delta, kk, i)$.

Из уравнения равновесия шарнирно-стержневой системы найдена сила $F(\delta, kk)$, вызывающая перемещение δ .



Результаты расчета приведены на рис. 22П.5. При выборе диаграммы Прандтля (бесконечно длинной площадки текучести) нагрузка F , достигнув предельного значения, остается постоянной при росте перемещения δ . Несущая способность системы исчерпана. Происходит перемещение при постоянной нагрузке. При линейном или степенном упрочнении материала нагрузка F возрастает с ростом перемещения δ .

Пример 23. Учет упругопластических деформаций при изгибе.

(Программа 23-plast2.mcd)

Распределение деформаций при упругопластическом изгибе такое же, как при упругом изгибе. Распределение напряжений в сечении балки зависит от выбранного способа аппроксимации диаграммы деформирования. Характер распределения деформаций и напряжений при упругопластическом изгибе показан на рис. 23П.2. Рассмотрим численный пример определения напряжений при упругопластическом изгибе балки. Исходные данные для расчета приведены на рис. 23П.1. Схема балки не имеет значения, так как распределения напряжений в сечении балки не зависит от схемы нагружения, а зависит только от величины изгибающего момента и материала балки.

$$m := m \quad mm := 0.001 \cdot m \quad cm := 0.01 \cdot m \quad MPa := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2} \\ kH := 1000 \cdot N \quad kNm := 1 \cdot kH \cdot m$$

Исходные данные

материал - сталь30

$$E := 2 \cdot 10^5 \cdot MPa \quad \sigma_T := 400 \cdot MPa \quad \sigma_B := 600 \cdot MPa \quad \varepsilon_B := 0.1$$

$$\varepsilon_T := \frac{\sigma_T}{E} \quad E1 := \frac{\sigma_B - \sigma_T}{\varepsilon_B - \varepsilon_T} \quad E1 = 2041 \cdot MPa$$

$$\text{Размеры прямоугольного сечения} \quad b := 10 \cdot mm \quad h := 40 \cdot mm$$

Рис. 23П.1 Исходные данные для расчета напряжений при упругопластическом изгибе балки

Характеристики прочности материала взяты из справочника. Деформацией, соответствующей пределу прочности $\varepsilon_B \approx 0,1$ задаемся "на глазок".

Обратите внимание, что модуль упрочнения $E1$, равный тангенсу угла наклона линейной аппроксимации диаграммы деформирования, в 100 раз меньше модуля Юнга E . То есть одно и то же приращение деформации при упругопластической деформации вызывает приращение напряжений в 100 раз меньшее, чем при упругой деформации. В этом причина того, что большая ошибка в аппроксимации диаграммы вызывает маленькую ошибку в распределении напряжений.

Рассматриваем балку прямоугольного поперечного сечения с размерами b и h . Длина балки для расчета не имеет значения, так как будем искать не нагрузки на балку, а изгибающий момент в сечении.

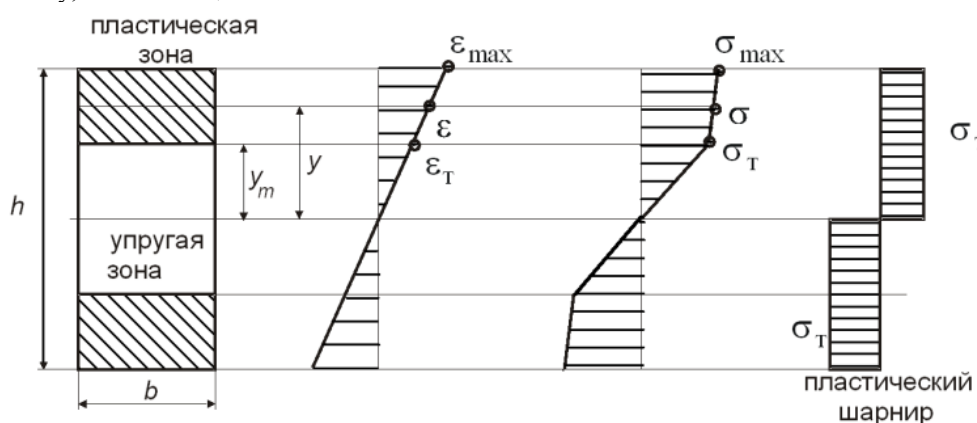


Рис. 23П.2. Распределение деформаций и напряжений при упругопластическом изгибе балки

Задаваясь максимальной деформацией в крайних волокнах балки, определяем распределение деформаций по высоте сечения балки. Затем, введя аппроксимацию диаграммы деформирования, определяем распределение напряжений, соответствующих найденным деформациям.

ПРИМЕЧАНИЕ

Как будет видно на рис. 23П.5, в процессе пластической деформации изгибающий момент изменяется незначительно. Задаваясь им в начале расчета, можно просто не получить никакого решения, не попав в диапазон изменения изгибающего момента.

Вид аппроксимирующей функции приведен на рис. 23П.3, распределение напряжений по высоте сечения балки в зависимости от принятой аппроксимации диаграммы деформирования показано на рис. 23П.4.

из гипотезы плоских сечений $\frac{\varepsilon_{\max}}{h/2} = \frac{\varepsilon_T}{y_T} = \frac{\varepsilon}{y}$

$$y_T(\varepsilon_{\max}) := \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{\max}} \cdot \frac{h}{2} \quad \varepsilon(\varepsilon_{\max}, y) := \varepsilon_{\max} \frac{y}{\frac{h}{2}} \quad y := 0, \frac{h}{100} \dots \frac{h}{2}$$

| | | |
|---------------------------------------|---|----------------------|
| $\sigma(\varepsilon_{\max}, y, k) :=$ | $E \cdot \varepsilon(\varepsilon_{\max}, y)$ if $\varepsilon(\varepsilon_{\max}, y) \leq \varepsilon_T$ | упругая деформация |
| | otherwise | |
| | σ_T if $k = 1$ | диаграмма Прандтля |
| | $390 \text{ МПа} + E1 \cdot (\varepsilon(\varepsilon_{\max}, y) - \varepsilon_T)$ if $k = 2$ | линейное упрочнение |
| | $330 \text{ МПа} + 400 \cdot (\varepsilon(\varepsilon_{\max}, y))^{0.3} \cdot \text{МПа}$ if $k = 3$ | степенное упрочнение |

Рис. 23П.3. Распределение напряжений по высоте сечения балки

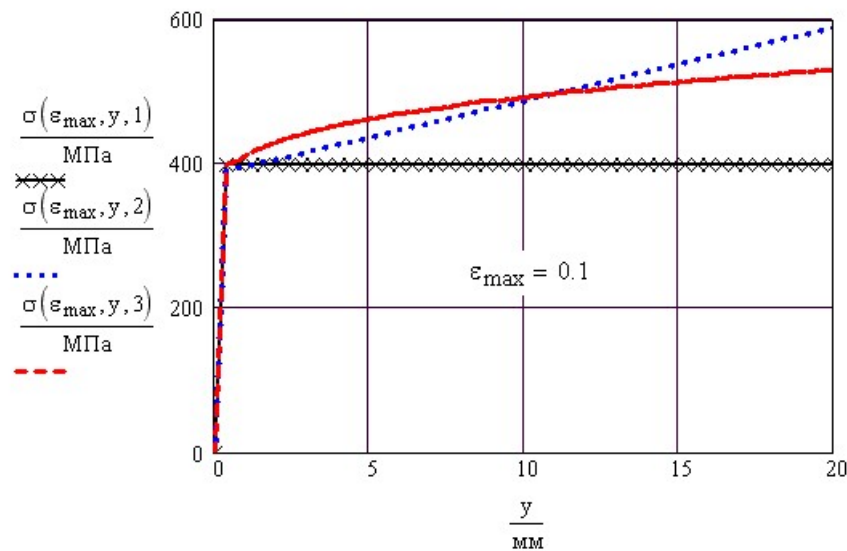


Рис. 23П.4. Напряжения в поперечном сечении балки с учетом аппроксимации диаграммы деформирования

Изгибающий момент в поперечном сечении балки определяем по условию эквивалентности напряжений и внутренних усилий $M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$.

Зависимость изгибающего момента M от величины максимальной деформации ε_{\max} и вида аппроксимации диаграммы деформирования показана на рис. 23П.5.

С ростом ε_{\max} величина y_T уменьшается и при $\varepsilon_{\max} \rightarrow \infty$ $y_T \rightarrow 0$, но практически (и теоретически) вблизи нейтральной оси всегда существует упругая зона (пусть и очень маленькая).

Изгибающий момент при использовании линейной или степенной аппроксимации диаграммы деформирования медленно растет с ростом ε_{\max} . При использовании диаграммы Прандтля изгибающий момент с ростом пластических деформаций растет очень медленно, практически оставаясь постоянным.

Такое состояние, когда изгибающий момент практически не растет, а значит деформация происходит при постоянной нагрузке, называется *пластическим шарниром*. Понятие пластический шарнир имеет смысл только при использовании диаграммы Прандтля.

В нашем примере можно считать, что пластический шарнир уже существует при $\varepsilon_{\max} = 0,02$ или $y_T = 2$ мм.

На том же рисунке 23П.5 сплошной черной линией показано изменение границы зоны пластичности y_T от ε_{\max} . При $\sigma_{\max} = \sigma_T$ $y_T = h/2$.

Изгибающий момент
в опасном сечении балки

$$M(\varepsilon_{\max}, k) := 2 \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma(\varepsilon_{\max}, y, k) \cdot y \cdot b \, dy$$

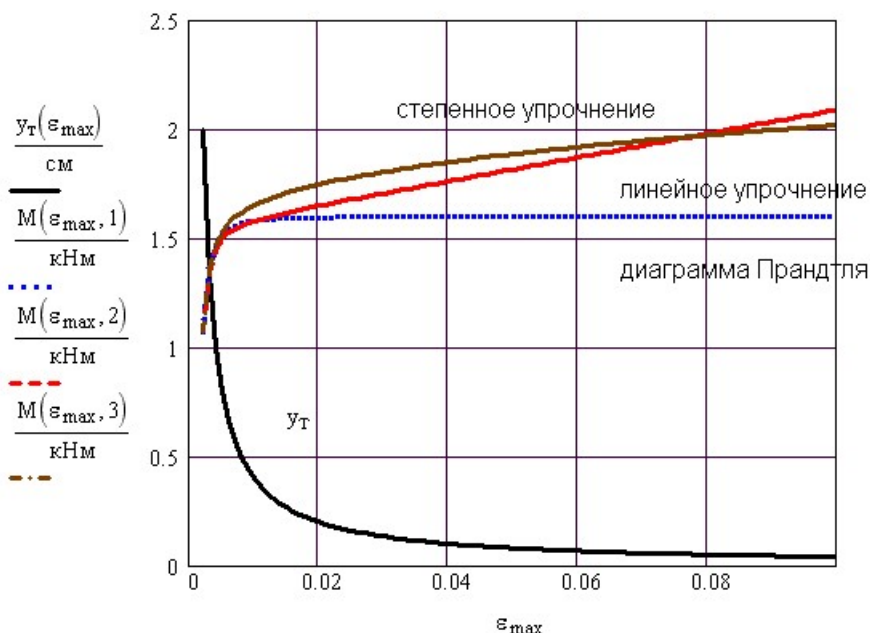


Рис. 23П.5. Зависимость размера упругого ядра сечения y_T и изгибающего момента от деформации ε_{\max} и от вида аппроксимации диаграммы деформирования

Если задан изгибающий момент и надо найти соответствующее ему распределение напряжений по сечению балки, то надо по графику $M - \varepsilon_{\max}$ найти величину ε_{\max} , соответствующую заданному значению M . Затем построить график σ от y при найденном значении ε_{\max} .

Прямая задача - задана нагрузка, найти распределение напряжений

Поменяйте M1

Дано: $M1 := 1.7 \cdot \text{кНм}$ Найти ε_{\max}

Диаграмма деформирования $k := 2$

$\varepsilon_{\max 1} := 0.006$ начальное приближение

$\varepsilon_{\max 1} := \text{root}(M(\varepsilon_{\max 1}, k) - M1, \varepsilon_{\max 1})$

$\varepsilon_{\max 1} = 0.029$ $y_{\text{тек}} := \frac{y_T(\varepsilon_{\max 1})}{\text{мм}}$ метка на графике

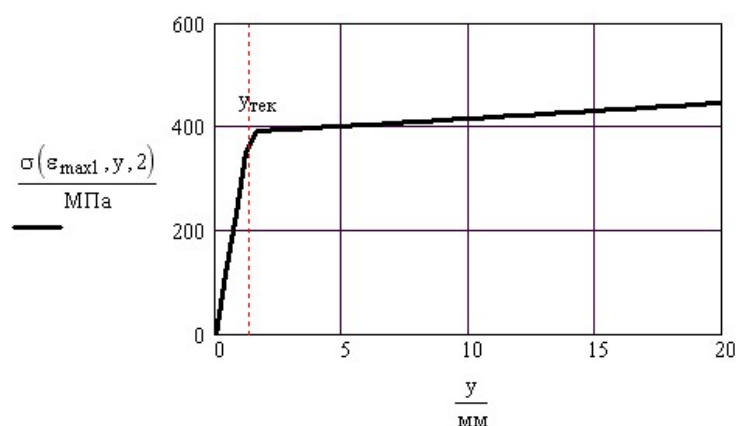


Рис. 23П.6. Определение распределения напряжений в сечении балки при заданном изгибающем моменте

Эту же задачу можно решить с помощью функции **root** (рис. 23П.6), предварительно записав зависимости, приведенные на рис. 23П.3 и 23П.4.

В пластически деформированной балке при разгрузке возникают остаточные напряжения. Определим величину остаточных напряжений.

При определении остаточных напряжений следует учесть, что *при нагрузке распределение напряжений упругопластическое, при разгрузке — чисто упругое*.

Остаточные напряжения определяются как сумма напряжений нагрузки и разгрузки. Определение остаточных напряжений при упругопластическом изгибе показано на рис. 23П.7.

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma_{\text{нагр}} + \sigma_{\text{разгр}}.$$

при разгрузке $\sigma_{\text{max}}(\varepsilon_{\text{max}}, k) := -M(\varepsilon_{\text{max}}, k) \cdot \frac{6}{b \cdot h^2}$ $\sigma_{\text{разгр}}(y) := \sigma_{\text{max}}(\varepsilon_{\text{max}}, k) \cdot \frac{y}{\frac{h}{2}}$

при нагрузке $\sigma_{\text{нагр}}(y) := \sigma(\varepsilon_{\text{max}}, y, k)$

остаточные напряжения $\sigma_{\text{остат}}(y) := \sigma_{\text{нагр}}(y) + \sigma_{\text{разгр}}(y)$

$k = 3$ $\varepsilon_{\text{max}} = 0.1$ (поменяйте данные)

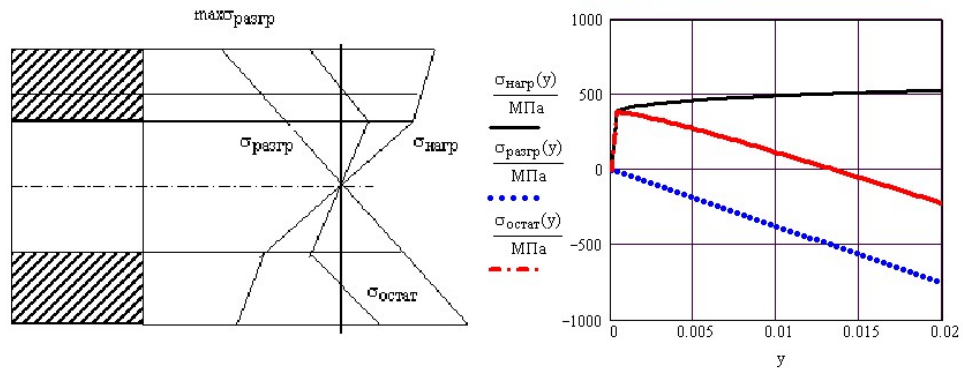


Рис. 23П.7 Определение остаточных напряжений при упругопластическом изгибе балки

Работая с программой, поменяйте значение ε_{max} и посмотрите на характер эпюр и величину остаточных напряжений.

Пример 24. Учет пластических деформаций при кручении.

(Программа 24-plast3.mcd)

Распределение деформаций при упругопластическом кручении такое же, как при упругом кручении. Распределение напряжений в сечении стержня зависит от выбранного способа аппроксимации диаграммы деформирования. Подробный анализ напряженно-деформированного состояния стержня при кручении приведен в главе 8. Характер распределения деформаций и напряжений при упругопластическом кручении показан на рис. 24П.1.

В качестве примера для расчета выбран стержень из стали 30 диаметром 6 мм и длиной 150 мм, применяемый при лабораторных испытаниях на кручение, что позволяет сравнить расчетные данные с результатом испытания. Для расчета использованы результаты испытания этой стали на растяжение (предел текучести σ_T , сопротивление разрыву σ_p и деформация в шейке при разрыве ε_p). Исходные данные для расчета приведены на рис. 24П.2.

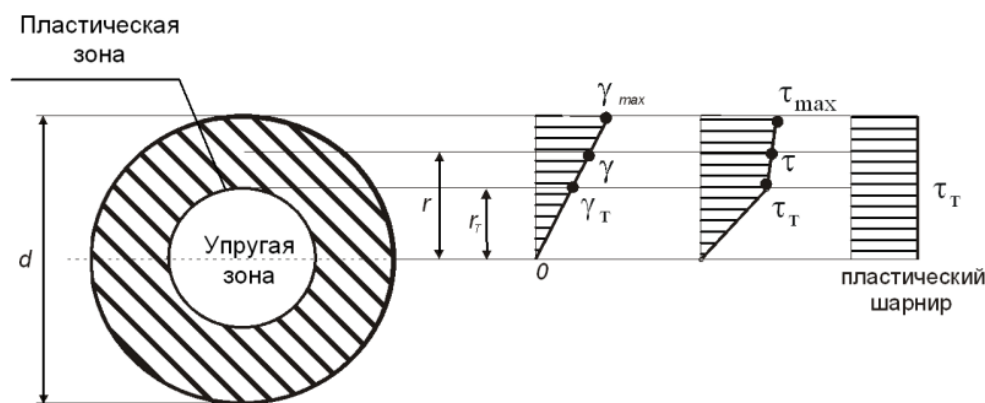


Рис. 24П.1. Распределение деформаций и касательных напряжений в сечении стержня при упругопластическом кручении

$$\begin{aligned} \text{град} &:= \text{deg} & \text{мм} &:= 0.001 \cdot \text{м} & \text{см} &:= 0.01 \cdot \text{м} & \text{Н} &:= \text{Н} & \text{МПа} &:= 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \\ \text{кН} &:= 1000 \cdot \text{Н} & \text{Нм} &:= \text{Н} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Исходные данные

Размеры стержня $d := 6 \cdot \text{мм}$ $L := 150 \cdot \text{мм}$

материал - сталь30 $E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$ $G := 8 \cdot 10^4 \cdot \text{МПа}$

$\sigma_T := 400 \cdot \text{МПа}$ $\sigma_p := 1000 \cdot \text{МПа}$ $\varepsilon_p := 0.8$ при разрыве

Рис. 24П.2. Исходные данные для расчета стержня на упругопластическое кручение

Вначале строим диаграмму деформирования при растяжении. Поскольку заданы лишь две характеристики прочности, диаграмму деформирования проведем через две точки, то есть используем аппроксимацию диаграммы деформирования с линейным упрочнением. Обратите внимание, что модуль упрочнения $E1$ в 300 раз меньше модуля Юнга E (рис. 24П.3).

Для перехода к диаграмме кручения запишем связь между касательными и нормальными напряжениями $\tau = \sigma / \sqrt{3}$ и между углом сдвига и линейной деформацией $\gamma = \varepsilon \sqrt{3}$. Эти соотношения даются в теории пластичности в соответствии с четвертой гипотезой прочности (гипотезой Мизеса), о которой речь пойдет в следующей главе.

Осуществив с помощью этих соотношений переход от диаграммы растяжения к диаграмме кручения, строим обе диаграммы (для сравнения) (рис. 24П.3). Диаграмма кручения получается в $\sqrt{3}$ раз ниже и в $\sqrt{3}$ раз длиннее, чем диаграмма растяжения.

Построение диаграммы деформирования

Для перехода от диаграммы деформирования при растяжении к диаграмме деформирования при кручении используем зависимости из теории пластичности

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad \gamma = \varepsilon \cdot \sqrt{3}$$

$$E1 := \frac{\sigma_p - \sigma_T}{\varepsilon_p} \quad \sigma(\varepsilon) := \sigma_T + E1 \cdot \varepsilon \quad E1 = 750 \text{ МПа}$$

переключите выражения G1

$$\tau_T := \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \quad \tau_p := \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \quad \gamma_p := \varepsilon_p \cdot \sqrt{3} \quad G1 := \frac{\tau_p - \tau_T}{\gamma_p} \quad G1 := 0 \text{ МПа} \quad \tau(\gamma) := \tau_T + G1 \cdot \gamma$$

Модуль упрочнения $G1=0$ соответствует диаграмме Прандтля с бесконечно длинной площадкой текучести.

$$\gamma := 0, 0,01 \dots \gamma_p \quad \varepsilon := 0, 0,01 \dots \varepsilon_p \quad G1 = 250 \text{ МПа}$$

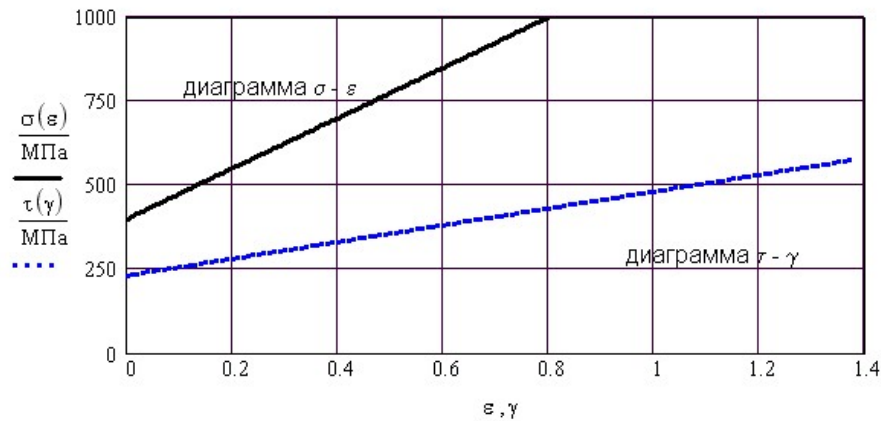


Рис. 24П.3 Диаграммы деформирования при растяжении и при кручении

Далее вводим расчетные выражения (рис. 24П.4).

Результаты расчета приведены на рис. 24П.5.

Связь угла сдвига γ и угла закручивания ϕ

$$\gamma_T := \frac{\tau_T}{G} \quad \phi_T := \gamma_T \cdot \frac{2 \cdot L}{d} \quad \phi_p := \gamma_p \cdot \frac{2 \cdot L}{d} \quad \begin{matrix} \text{начало текучести} & \text{Разрушение} \\ \phi_T = 8,3 \text{ град} & \phi_p = 3970 \text{ град} \end{matrix}$$

геометрические уравнения

$$\gamma_{\max}(\phi) := \phi \cdot \frac{d}{2 \cdot L} \quad \gamma(r, \phi) := \gamma_{\max}(\phi) \cdot r \cdot \frac{2}{d} \quad r_T(\phi) := \frac{\gamma_T}{\gamma_{\max}(\phi)} \cdot \frac{d}{2}$$

физические уравнения при нагрузке

$$\tau_{\text{нагр}}(r, \phi) := \begin{cases} (G \cdot \gamma(r, \phi)) & \text{if } \gamma(r, \phi) < \gamma_T \\ \tau(\gamma(r, \phi)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

уравнения равновесия

$$M_k(\phi) := 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \tau_{\text{нагр}}(r, \phi) \cdot r^2 \, dr$$

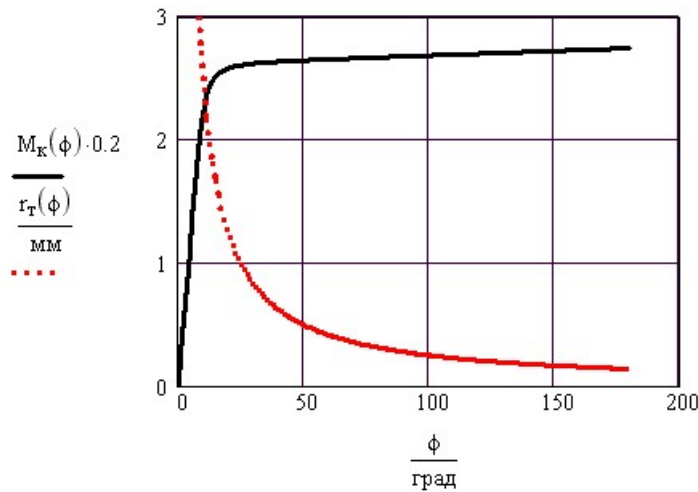
Рис. 24П.4. Расчет стержня на упругопластическое кручение

В процессе деформации с ростом угла закручивания стержня крутящий момент быстро растет до появления пластических деформаций, затем рост M_k резко замедляется при линейной аппроксимации диаграммы деформирования и почти полностью прекращается при использовании диаграммы Прандтля.

Пластические деформации на поверхности стержня появляются при угле закручивания $\phi_T \approx 10^\circ$ и крутящем моменте $M_k \approx 10$ Нм. Разрушается стержень при угле закручивания $\phi_p \approx 4000^\circ$ (свыше 11 оборотов) и крутящем моменте $M_{kp} \approx 28$ Нм при линейном упрочнении или $M_{kp} \approx 13$ Нм при использовании диаграммы Прандтля.

$$\phi := 0, 0.02 \dots \pi \quad r := 0 \text{ мм}, 0.02 \cdot \frac{d}{2} \dots \frac{d}{2}$$

83



| | | |
|------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| | на поверхности $\tau = \tau_T$ | при разрыве |
| крутящий момент | $M_K(\phi_T) = 9.8 \text{ Нм}$ | $M_K(\phi_p) = 27.8 \text{ Нм}$ |
| граница зоны упругости | $r_T(\phi_T) = 3 \text{ мм}$ | $r_T(\phi_p) = 0.006 \text{ мм}$ |

Рис. 24П.5. Зависимость крутящего момента M_K и радиуса границы упругой зоны r_T от угла закручивания стержня ϕ

Определим остаточные напряжения при упругопластическом кручении. Основная мысль расчета та же, что и при изгибе. Нагрузка — упругопластическая, разгрузка — чисто упругая.

Остаточные напряжения равняются сумме напряжений при нагрузке и при разгрузке $\tau_{\text{ост}} = \tau_{\text{нагр}} + \tau_{\text{разгр}}$. Расчет остаточных напряжений показан на рис. 24П.6.

Определение остаточных напряжений при разгрузке после закручивания стержня на угол ϕ_1

$\phi_1 := 20 \text{ град}$ поменяйте значения ϕ_1

при разгрузке $\tau_{\text{max}}(\phi) := -M_K(\phi) \cdot \frac{16}{\pi \cdot d^3}$ $\tau_{\text{разгр}}(r, \phi) := \tau_{\text{max}}(\phi) \cdot r \cdot \frac{2}{d}$

Остаточные напряжения $\tau_{\text{ост}}(r, \phi) := \tau_{\text{нагр}}(r, \phi) + \tau_{\text{разгр}}(r, \phi)$

Распределение напряжений в сечении

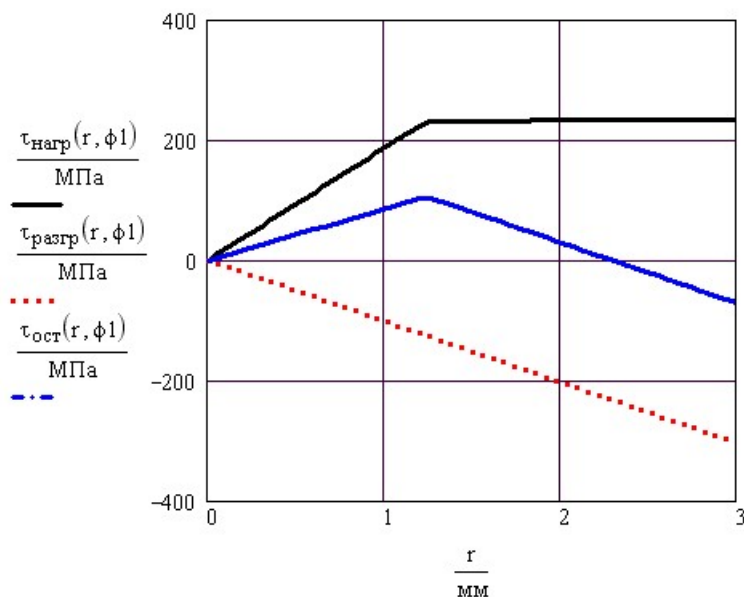


Рис. 24П.6. Остаточные напряжения при упругопластическом кручении

При работе с программой переключите выражения для $G1$. На рис. 24П.3 включено выражение $G1$ для линейной аппроксимации диаграммы деформирования. Включите $G1=0$ для использования диаграммы Прандтля и посмотрите на изменение

результатов расчета. Сможете увидеть, что при углах закручивания $\phi > 30^\circ$ крутящий момент практически не растет, следовательно образовался пластический шарнир. При $\phi = 30^\circ$ упругая зона имеет размер $r_T \approx r_{\max}/3$ мм.

Прямая задача - задана нагрузка,
найти распределение напряжений

Дано: $M_{K1} := 13 \cdot \text{Нм}$ поменяйте M_{K1} Найти: ϕ

$\phi := 0.01$ начальное приближение $\phi := \text{root}(M_K(\phi) - M_{K1}, \phi)$ $\phi = 23.4$ град

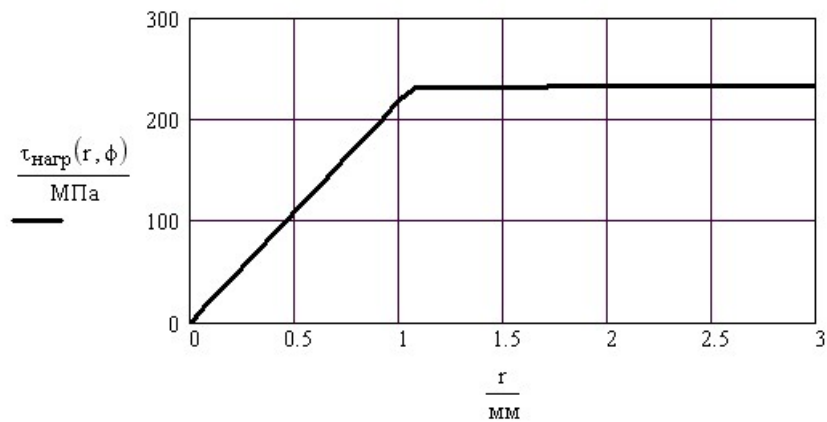


Рис. 24П.7 Определение касательных напряжений τ при заданном крутящем моменте M_K

При заданном крутящем моменте можно непосредственно по графику (рис. 24П.7), найти угол закручивания, ему соответствующий.

Задаваться "на глазок" крутящим моментом не имеет смысла, так как упругопластический момент изменяется в очень небольших пределах, и велика вероятность, что не будет найдено никакого решения.

Как показано на рис. 24П.7, посмотрев на график (рис. 24П.5), можно задаться реальным значением M_K , с помощью функции **root** определить угол закручивания, соответствующий этому моменту, и построить эпюру касательных напряжений в сечении стержня.

Пример 25. Расчет прямого стержня на сложное сопротивление.

(Программа 25-slog-sopr1.mcd)

Рассмотрим стержень произвольного сечения, защемленный одним концом и нагруженный произвольными нагрузками. Форма сечения стержня показана на рис. 25П.1. Условная схема нагружения стержня приведена на рис. 25П.2. Условность схемы состоит в том, что на ней показаны всего несколько нагрузок, чтобы ввести условные обозначения нагрузок и координат их точек приложения. В расчет введено по несколько нагрузок в каждом направлении (число их может быть любым) в виде векторов. Всего на стержень действуют 23 нагрузки.

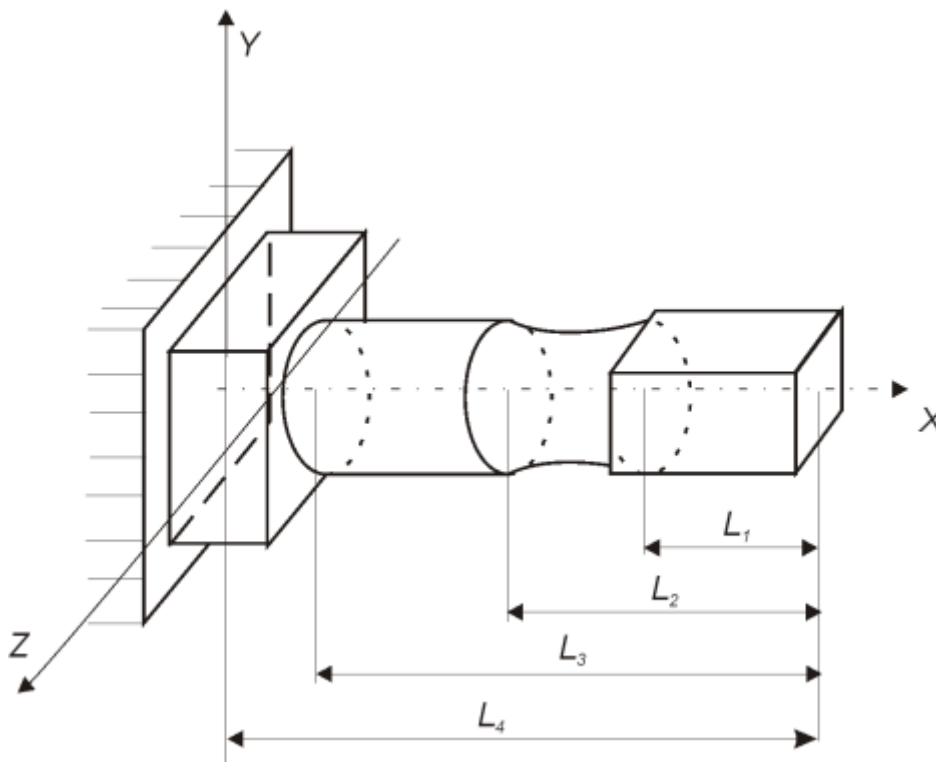


Рис. 25П.1. Форма сечения стержня

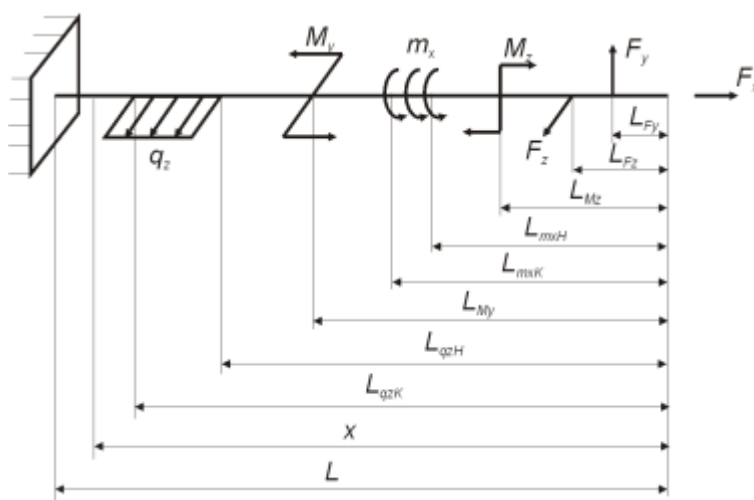


Рис. 25П.2. Условная схема нагружения стержня

Исходные данные для определения внутренних усилий приведены на рис. 25П.3. Расчет ведется с учетом размерностей, поэтому перед вводом данных приведены производные размерности.

В предлагаемой вам программе выражения для расчета внутренних усилий скрыты в закрытых зонах для уменьшения размера документа. на экране закрытая зона отмечена сплошной линией (рис. 25П.3). Двойной щелчок мышью на этой линии вызывает появление содержимого закрытой зоны на экране. Чтобы снова скрыть появившийся фрагмент программы, надо щелкнуть правой кнопкой мыши на границе зоны и в появившемся контекстном меню выбрать [Collapse](#) (Сжать). На рисунках 25П.4, 25П.5, 25П.6 показано определение внутренних усилий, скрытое в закрытых зонах.

продольное усилие $L := 1 \text{ м}$ $x := 0 \text{ м}, \frac{L}{100} \dots L$

$$F_x := \begin{pmatrix} 50 \\ -20 \\ -50 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} \quad L_{F_x} := \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad q_x := \begin{pmatrix} -70 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad L_{q_{x1}} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad L_{q_{x2}} := \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

Здесь скрыто определение продольных усилий $N(x)$

Двойной щелчок на линии скрытых зон открывает содержимое зоны
Двойной щелчок на линии раскрытых зон скрывает содержимое зоны

крутящий момент

$$m_x := \begin{pmatrix} -1000 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{Нм}}{\text{м}} \quad L_{m_{x1}} := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad L_{m_{x2}} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad M_x := \begin{pmatrix} 500 \\ -300 \end{pmatrix} \cdot \text{Нм} \quad L_{M_x} := \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

Здесь скрыто определение крутящих моментов $M_k(x)$

изгиб вокруг оси y

$$F_z := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} \quad L_{F_z} := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad q_z := \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad L_{q_{z1}} := \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad L_{q_{z2}} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

$$M_y := \begin{pmatrix} 500 \\ -200 \end{pmatrix} \cdot \text{Нм} \quad L_{M_y} := \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

Здесь скрыто определение изгибающих моментов $M_y(x)$

изгиб вокруг оси z

$$F_y := \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} \quad L_{F_y} := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad q_y := \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad L_{q_{y1}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad L_{q_{y2}} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

$$M_z := \begin{pmatrix} 500 \\ -400 \end{pmatrix} \cdot \text{Нм} \quad L_{M_z} := \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$$

Здесь скрыто определение изгибающих моментов $M_z(x)$

Рис. 25П.3 Исходные данные для расчета внутренних усилий

$$N_F(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F_x)} \left[F_{x_i} \cdot (x > L_{F_{x_i}}) \right]$$

$$N_q(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_x)} \left[q_{x_i} \cdot (x - L_{q_{x1}}) \cdot (x > L_{q_{x1}}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_x)} \left[q_{x_i} \cdot (x - L_{q_{x2}}) \cdot (x > L_{q_{x2}}) \right]$$

$$N(x) := N_F(x) + N_q(x)$$

$$M_{kM}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M_x)} \left[M_{x_i} \cdot (x > L_{M_{x_i}}) \right]$$

$$M_{km}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(m_x)} \left[m_{x_i} \cdot (x - L_{m_{x1}}) \cdot (x > L_{m_{x1}}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(m_x)} \left[m_{x_i} \cdot (x - L_{m_{x2}}) \cdot (x > L_{m_{x2}}) \right]$$

$$M_k(x) := M_{kM}(x) + M_{km}(x)$$

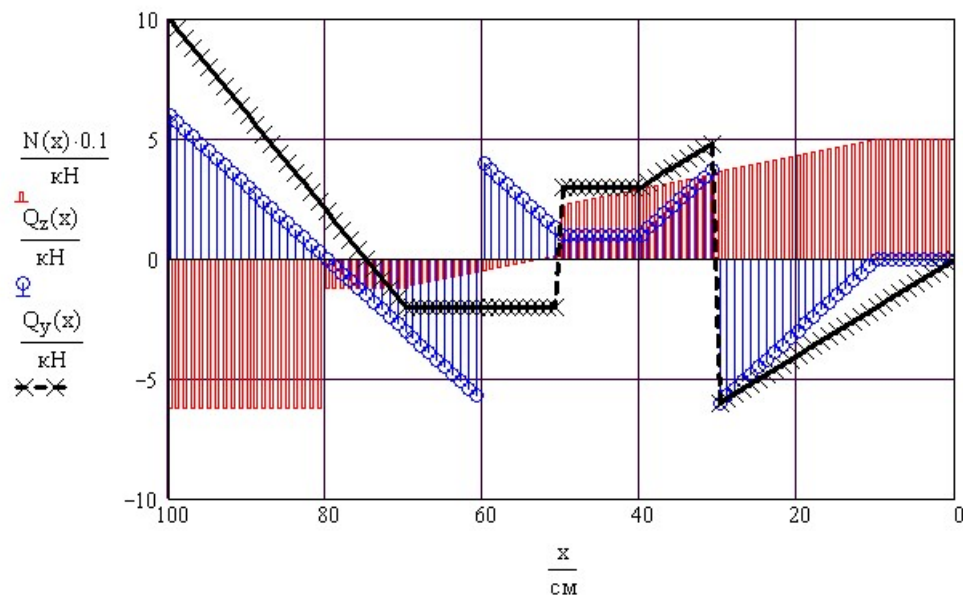
Рис. 25П.4 Расчет продольных усилий и крутящих моментов

$$\begin{aligned}
 Q_{Fz}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(F_z)} [F_{z_i} \cdot (x > L_{Fz_i})] \\
 Q_{qz}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_z)} [q_{z_i} \cdot (x - L_{qzH_i}) \cdot (x > L_{qzH_i})] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_z)} [q_{z_i} \cdot (x - L_{qzK_i}) \cdot (x > L_{qzK_i})] \\
 Q_z(x) &:= Q_{Fz}(x) + Q_{qz}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{yMy}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(M_y)} [M_{y_i} \cdot (x > L_{My_i})] \\
 M_{yFz}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(F_z)} [F_{z_i} \cdot (x - L_{Fz_i}) \cdot (x > L_{Fz_i})] \\
 M_{yqz}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_z)} \left[q_{z_i} \cdot \frac{(x - L_{qzH_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qzH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_z)} \left[q_{z_i} \cdot \frac{(x - L_{qzK_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qzK_i}) \right] \\
 M_y(x) &:= M_{yMy}(x) + M_{yFz}(x) + M_{yqz}(x)
 \end{aligned}$$

Рис. 25II.5 Внутренние усилия при изгибе вокруг оси y

$$\begin{aligned}
 Q_{Fy}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(F_y)} [F_{y_i} \cdot (x > L_{Fy_i})] \\
 Q_{qy}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_y)} [q_{y_i} \cdot (x - L_{qyH_i}) \cdot (x > L_{qyH_i})] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_y)} [q_{y_i} \cdot (x - L_{qyK_i}) \cdot (x > L_{qyK_i})] \\
 Q_y(x) &:= Q_{Fy}(x) + Q_{qy}(x) \\
 M_{zMz}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(M_z)} [M_{z_i} \cdot (x > L_{Mz_i})] \\
 M_{zFy}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(F_y)} [F_{y_i} \cdot (x - L_{Fy_i}) \cdot (x > L_{Fy_i})] \\
 M_{zqy}(x) &:= \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_y)} \left[q_{y_i} \cdot \frac{(x - L_{qyH_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qyH_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q_y)} \left[q_{y_i} \cdot \frac{(x - L_{qyK_i})^2}{2} \cdot (x > L_{qyK_i}) \right] \\
 M_z(x) &:= M_{zMz}(x) + M_{zFy}(x) + M_{zqy}(x)
 \end{aligned}$$

Рис. 25II.6 Внутренние усилия при изгибе вокруг оси z Рис. 25II.7 Эпюры продольных усилий N и поперечных сил Q_y и Q_z

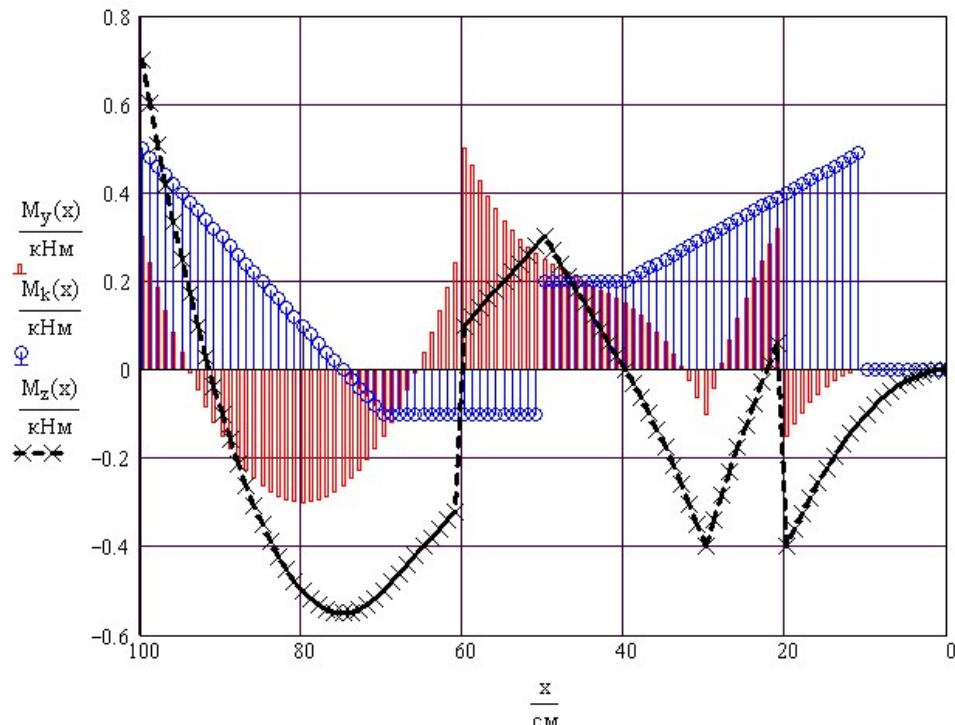


Рис. 25П.8 Эпюры изгибающих моментов M_y , M_z и крутящего момента M_k

При определении внутренних усилий использованы выражения из примеров 9, 10, 11 (рис. 9П.3, 10П.2, 11П.4). В этих выражениях использованы пары сил, сосредоточенные силы и распределенные нагрузки постоянной интенсивности. При необходимости можно вставить готовые выражения и для нагрузки переменной интенсивности. При этом в силу использования интегральных выражений несколько увеличивается время расчета. Эпюры внутренних усилий показаны на рисунках 25П.7 и 25П.8.

При работе с программой вначале решите тестовые задачи. Для этого по каждому направлению оставьте по одной нагрузке, удалив старую нагрузку и вписав ноль на ее место.

Число нагрузок можно и увеличить, добавив строки в соответствующие векторы нагрузок и точек их приложения (рис. 25П.3).

Определив внутренние усилия, приступаем к расчету напряжений в поперечных сечениях стержня. Форма и размеры сечений по длине стержня могут изменяться произвольно.

Для расчета взят стержень, состоящий из 4-х участков различного поперечного сечения. Первый участок прямоугольный, второй — круглый, третий — кольцевой, четвертый — квадратного сечения. Размеры сечения по длине участка могут изменяться. В нашем примере второй участок круглого поперечного сечения имеет кольцевую канавку параболической формы. Размеры сечения и длины участков приведены на рис. 25П.9.

Для расчета касательных напряжений в сечениях прямоугольной формы необходимо задавать коэффициенты α, β, γ , зависящие от соотношения сторон прямоугольника h/b . В программу введена таблица этих коэффициентов, которая с помощью встроенной функции `interp` превращена в функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ (рис. 25П.10). На этом же рисунке показан график зависимости коэффициентов α, β, γ от h/b .

прямоугольник

$$L1 := 0.2 \cdot L$$

$$b := 4 \cdot \text{см}$$

$$h := 6 \cdot \text{см}$$

круг

$$L2 := 0.5 \cdot L$$

$$d1(x) := \left[45 \cdot \left(x - \frac{L1 + L2}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{m^2} + 4 \right] \cdot \text{см}$$

кольцо

$$d := 4 \cdot \text{см}$$

$$D := 5 \cdot \text{см}$$

$$L3 := 0.7 \cdot L$$

$$hb := \frac{h}{b}$$

квадрат

$$b1 := 5 \cdot \text{см}$$

$$h1 := 5 \cdot \text{см}$$

$$\text{от } L3 \text{ до } L$$

$$hb1 := \frac{h1}{b1}$$

Здесь скрыт расчет моментов инерции и моментов сопротивления

Расчет максимальных эквивалентных напряжений

$$\sigma_{\text{круг}}(x) := \frac{\sqrt{M_k(x)^2 + M_y(x)^2 + M_z(x)^2}}{W_y(x)}$$

$$\sigma_{\text{max}}(x) := \begin{cases} \sigma_{\text{прямоуг}}(x) & \text{if } x < L1 \\ \sigma_{\text{круг}}(x) & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \sigma_{\text{круг}}(x) & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ \sigma_{\text{прямоуг}}(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{прямоуг}}(x) := \begin{cases} \sigma_1 \leftarrow \frac{|M_y(x)|}{W_y(x)} + \frac{|M_z(x)|}{W_z(x)} \\ \sigma_2 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_y(x)}{W_y(x)} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_k(x)}{W_k(x)} \right)^2} \\ \sigma_3 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_z(x)}{W_z(x)} \right)^2 + 4 \cdot \gamma(x) \cdot \left(\frac{M_k(x)}{W_k(x)} \right)^2} \\ \max(\sigma) \end{cases}$$

Рис. 25П.9 Расчет напряжений в стержне при сложном сопротивлении

Для расчета напряжений в сечениях необходимо определить моменты инерции и моменты сопротивления сечений. В основной программе они вставлены и скрыты сразу после ввода размеров сечений. В развернутом виде этот фрагмент показан на рис. 25П.11. Результаты расчета моментов инерции приведены на рис. 25П.12.

При использовании программы геометрические характеристики надо переопределить в соответствии с реальной задачей, ввести свои формы сечений и их характеристики. Максимальные напряжения для сечений прямоугольной и круглой формы определяются по разным формулам. Эти формулы приведены на рис. 2П.9.

Для прямоугольных сечений напряжения определяются в трех точках и из них выбирается наибольшее. Далее в виде маленькой подпрограммы записана функция распределения максимальных напряжений по длине стержня. Результаты расчета максимальных напряжений приведены на рис. 25П.13.

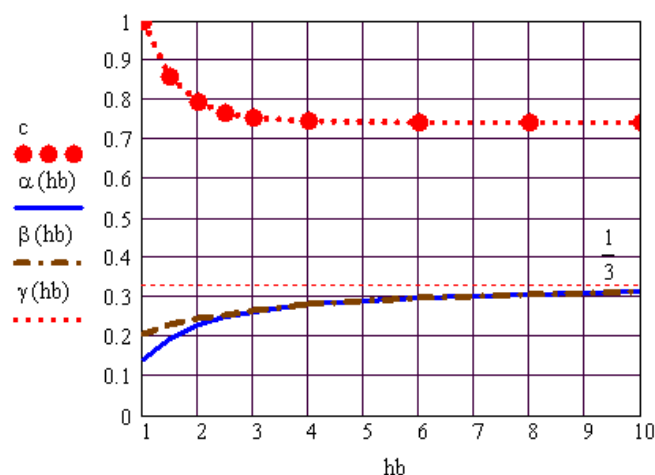
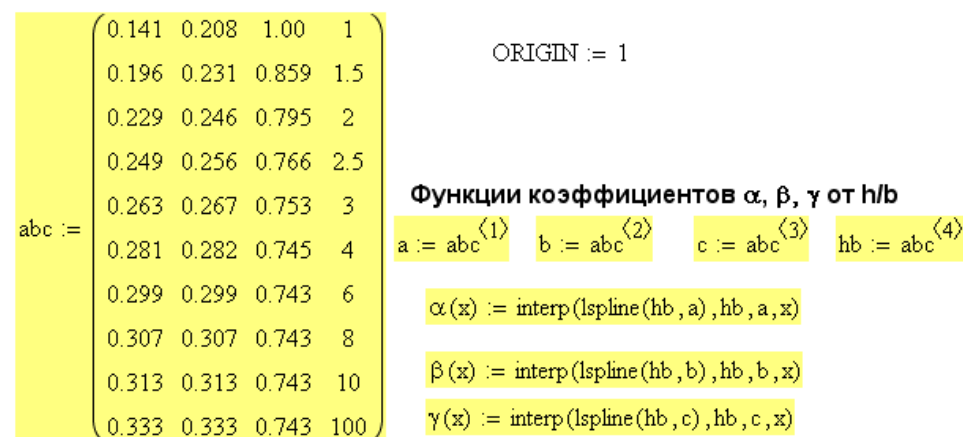


Рис. 25П.10 Преобразование таблицы коэффициентов α, β, γ в функции

| Моменты инерции | Моменты сопротивления |
|--|--|
| $J_z(x) := \begin{cases} \frac{b \cdot h^3}{12} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^4}{64} & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \frac{\pi}{64} \cdot D^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ \frac{b1 \cdot h1^3}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$ | $W_z(x) := \begin{cases} \frac{b \cdot h^2}{6} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^3}{32} & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \frac{\pi}{32} \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^3 \right] & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ \frac{b1 \cdot h1^2}{6} & \text{otherwise} \end{cases}$ |
| $J_y(x) := \begin{cases} \frac{b^3 \cdot h}{12} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^4}{64} & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \frac{\pi}{64} \cdot D^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ \frac{b1^3 \cdot h1}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$ | $W_y(x) := \begin{cases} \frac{b \cdot h^2}{6} & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^3}{32} & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \frac{\pi}{32} \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ \frac{b1^3}{6} & \text{otherwise} \end{cases}$ |
| $J_k(x) := \begin{cases} \alpha(hb) \cdot b^3 \cdot h & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^4}{32} & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ \alpha(hb1) \cdot b1^3 \cdot h1 & \text{otherwise} \end{cases}$ | $W_k(x) := \begin{cases} \beta(hb) \cdot b^2 \cdot h & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^3}{16} & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \frac{\pi}{16} \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ \beta(hb1) \cdot b1^2 \cdot h1 & \text{otherwise} \end{cases}$ |
| $\gamma(x) := \begin{cases} \gamma(hb) & \text{if } x < L1 \\ \gamma(hb1) & \text{if } x \geq L3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ | $A(x) := \begin{cases} b \cdot h & \text{if } x < L1 \\ \frac{\pi \cdot d1(x)^2}{4} & \text{if } L1 \leq x < L2 \\ \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2 & \text{if } L2 \leq x < L3 \\ (b1 \cdot h1) & \text{otherwise} \end{cases}$ |

Рис. 25П.11 Функции моментов инерции и моментов сопротивления по длине стержня

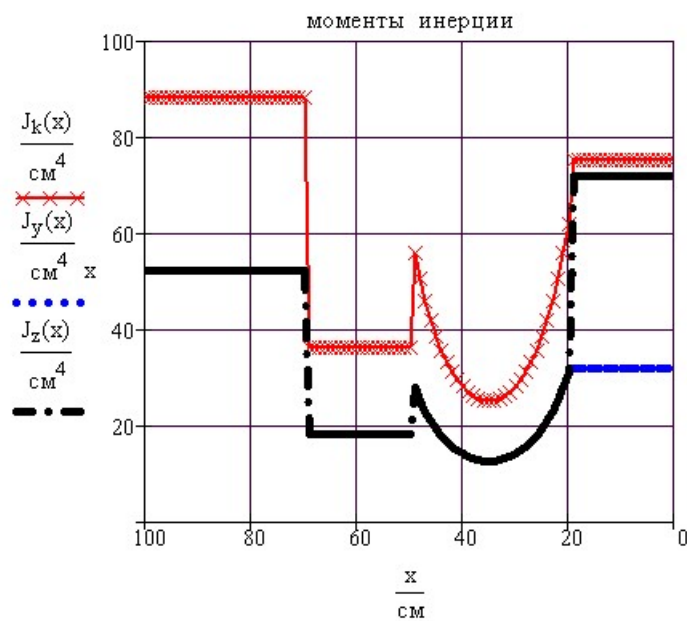


Рис. 25П.12. Графики моментов инерции по длине стержня

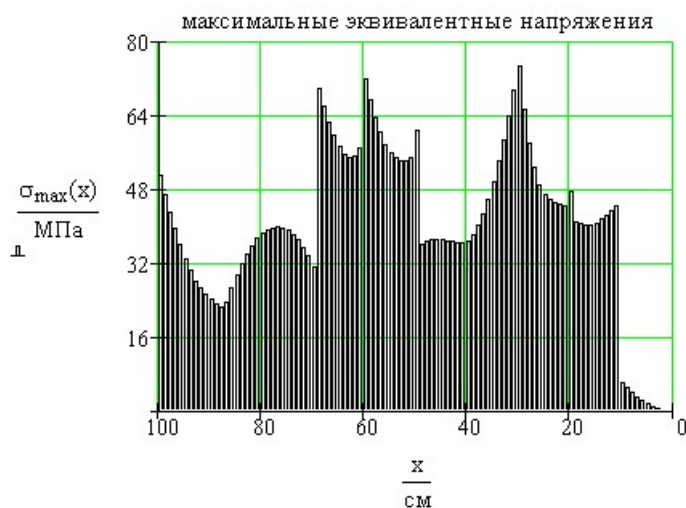


Рис. 25П.13 Изменение эквивалентного напряжения в опасных точках сечений по длине стержня

Встроенные функции Mathcad не в состоянии определить максимум ступенчатой функции, поэтому для определения максимального эквивалентного напряжения в стержне воспользуемся самодельной функцией **Fmax**, использующей простой перебор значений функции по всему диапазону значений аргумента (рис. 25П.14). При расчетах с учетом размерностей возникает сложность. Mathcad требует, чтобы все выводимые из программы величины имели одинаковую размерность. В нашем случае напряжение $\max \sigma$ измеряется в мегапаскалях, а координата сечения, где действует $\max \sigma$, величина x_{\max} измеряется в метрах. Чтобы обойти это требование, которое без больших усилий могли бы снять разработчики Mathcad, выполнено выравнивание размерностей в элементах выходного массива. Затем при выводе результатов произведен возврат к правильной размерности.

$L_H := 0 \cdot \text{м}$ $L_K := L$ $n := 100$

**В составном массиве вывода результатов расчета
сделать все размерности одинаковыми**

| | |
|---|---|
| $F_{\max}(F, L_H, L_K, N) := \begin{cases} L \leftarrow L_H \\ A1 \leftarrow F(L) \\ \text{while } L < L_K \\ \quad \left \begin{array}{l} L \leftarrow L + \frac{L_K - L_H}{n} \\ A2 \leftarrow F(L) \\ \text{if } A2 > A1 \\ \quad \left \begin{array}{l} A1 \leftarrow A2 \\ L2 \leftarrow L \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{cc} A1 & L2 \cdot \frac{\kappa H}{3} \end{array} \right)^T \end{cases}$ | $\max \sigma := F_{\max}(\sigma_{\max}, L_H, L_K, n)_1$ <p>Возвращение к исходной размерности</p> $x_{\max} := \frac{F_{\max}(\sigma_{\max}, L_H, L_K, n)_2 \cdot \text{м}^3}{\kappa H}$ <p>$\max \sigma = 74.7 \text{ МПа}$</p> <p>$x_{\max} = 0.3 \text{ м}$</p> |
|---|---|

Рис. 25П.14. Определение максимального эквивалентного напряжения в стержне

Определение перемещений прямого стержня при пространственном нагружении.

Перемещения стержня при сложном сопротивлении определяем с помощью интеграла Мора.

Единичные системы для определения перемещений стержня такие же, как для плоской задачи в примере 19, но развернутые на 180° , что соответствует грузовой системе. Они показаны на рис. 25П.15. Изменение плоскости изгиба не меняет вида единичной системы и выражения для моментов от единичной силы. Внутренние усилия от единичных сил приведены на рис. 25П.16. Там же приведены интегралы Мора для определения трех линейных и трех угловых перемещений стержня.

Вместо шести единичных систем нарисовано только три, так как уравнения изгибающих моментов от единичной силы не зависят от плоскости изгиба. Точно также момент от пары сил равен единице по всей длине стержня независимо от направления вращения.

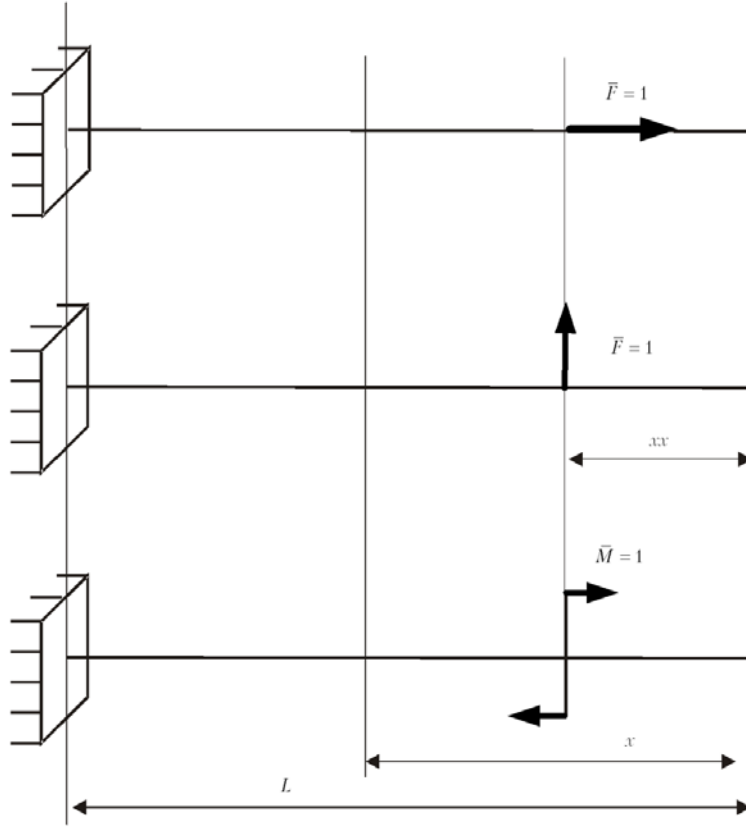


Рис. 25П.15. Единичные системы для консольного стержня при пространственном нагружении

Моменты от единичной силы

для прогиба

$$M1(x\bar{x}, x) := 1 \cdot (x - x\bar{x}) \cdot (x > x\bar{x})$$

для углов поворота

$$M2(x\bar{x}, x) := 1 \cdot (x \geq x\bar{x})$$

для удлинения

$$N1(x\bar{x}, x) := 1 \cdot (x \geq x\bar{x})$$

Прогибы стержня по осям y и z

$$\Delta_y(x\bar{x}) := \int_0^L \frac{M_y(x) \cdot M1(x\bar{x}, x)}{E \cdot J_y(x)} dx$$

$$\Delta_z(x\bar{x}) := \int_0^L \frac{M_z(x) \cdot M1(x\bar{x}, x)}{E \cdot J_z(x)} dx$$

Удлинение стержня

$$\Delta_x(x\bar{x}) := \int_0^L \frac{N(x) \cdot N1(x\bar{x}, x)}{E \cdot A(x)} dx$$

Углы поворота сечения стержня вокруг осей x, y, z

$$\Theta_z(x\bar{x}) := \int_0^L \frac{M_y(x) \cdot M2(x\bar{x}, x)}{E \cdot J_y(x)} dx$$

$$\Theta_y(x\bar{x}) := \int_0^L \frac{M_z(x) \cdot M2(x\bar{x}, x)}{E \cdot J_z(x)} dx$$

$$\Theta_x(x\bar{x}) := \int_0^L \frac{M_k(x) \cdot M2(x\bar{x}, x)}{G \cdot J_k(x)} dx$$

Рис. 25П.16. Определение перемещений стержня при сложном сопротивлении с помощью интеграла Мора

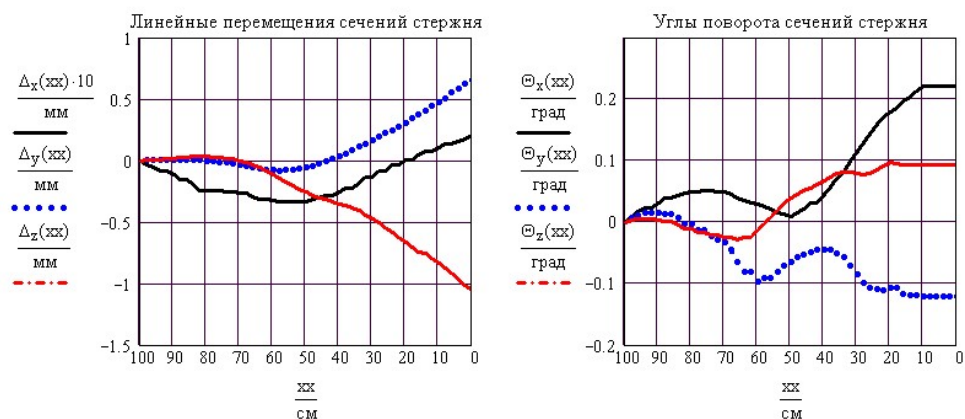


Рис. 25П.17. Линейные и угловые перемещения стержня при сложном сопротивлении

Результаты расчета перемещений при сложном сопротивлении стержня приведены на рис. 25П.17.

Обратите внимание на краткость и простоту записи в Mathcad исключительно сложной и трудоемкой задачи определения всех перемещений произвольно нагруженного стержня переменного ступенчатого поперечного сечения.

Пример 26. Расчет пространственного стержня на сложное сопротивление.

(Программа 26-slog-sopr2.mcd)

В отличие от большинства программ в этой книге это пример не универсальный и не может решить большинство подобных программ. Я все время рекомендую не использовать Mathcad для решения простых задач или, если Mathcad не облегчает, не ускоряет работу.

СОВЕТ

Mathcad — это инструмент решения задач и он должен ускорять работу, облегчать ее. В противном случае не используйте Mathcad.

На этом примере я решил показать возможность сборки программы из готовых фрагментов других программ. У студентов и инженеров нет времени на составление и отладку относительно сложных программ. Предлагаемые мной электронные книги, представляют собой фактически сборники программ. Составление программ пользователя из фрагментов готовых программ позволяет многократно сократить время их подготовки и использовать мой опыт составления программ.

Для заданного стержня (рис. 26.1) определим размеры поперечных сечений из условия прочности и определим горизонтальное перемещение конца стержня.

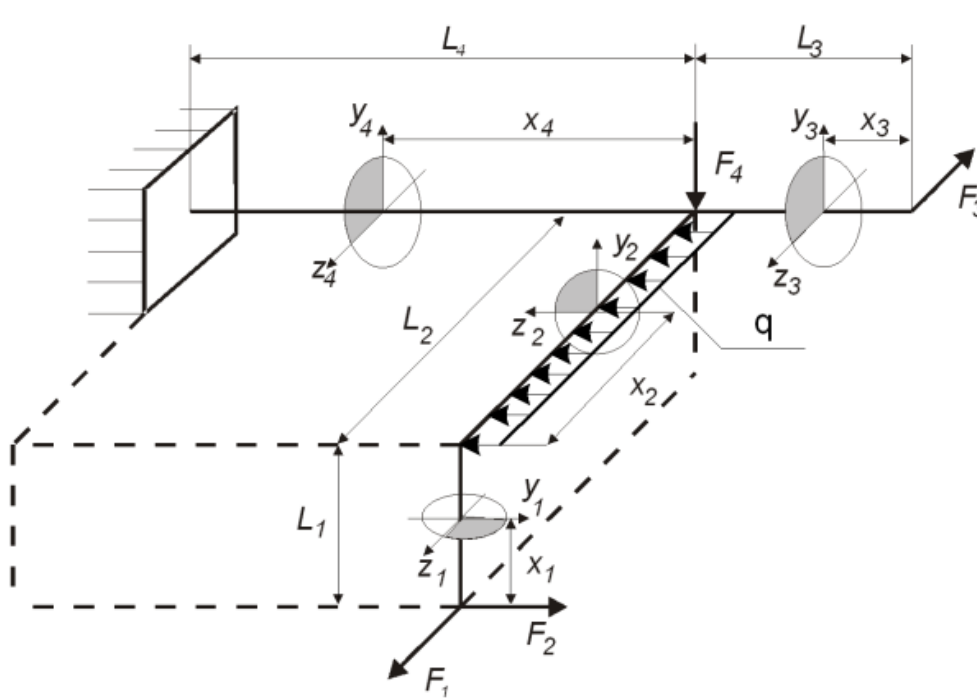


Рис. 26П.1. Расчетная схема пространственного стержня

Исходные данные для расчета приведены на рис. 26П.2. К исходным данным относится и матрица внутренних усилий $M_F(x)$, составленная "вручную".

| | | | | |
|---|---|---|---|--|
| длины участков | внешние силы | интенсивность распределенной нагрузки | допускаемое напряжение | |
| $L := \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \text{см}$ | $F := \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \text{кН}$ | $q := 20 \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ | $\sigma_{\text{доп}} := 100 \cdot \text{МПа}$ | $E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$ $G := 8 \cdot 10^4 \cdot \text{МПа}$ |

$$M_F(x) := \begin{bmatrix} 0 & -F_1 \cdot x & -F_2 \cdot x \\ -F_2 \cdot L_1 & -F_2 \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} & -F_1 \cdot L_1 \\ 0 & F_3 \cdot x & 0 \\ -F_1 \cdot L_1 & -F_1 \cdot x + F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot (L_3 + x) - \frac{q \cdot (L_2)^2}{2} & F_3 \cdot x - F_2 \cdot L_1 \end{bmatrix}$$

Эпюры внутренних усилий для заданного стержня приведены на рис. 26П.3 и построены "вручную" без участия Mathcad. Этот пакет может построить графики лишь при непрерывном изменении переменной, то есть для прямых стержней пусть и с большим числом участков, как в предыдущем примере.

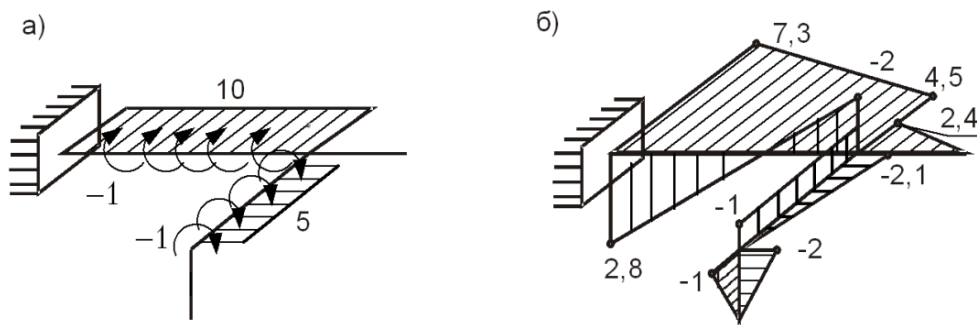


Рис. 26П.3. Эпюры внутренних усилий для стержня, построенные "вручную"

На рис. 26П.3,а показаны эпюры продольного усилия N и крутящего момента M_k , на рис. 26П.3,б эпюры изгибающих моментов M_y и M_z . Mathcad строит те же эпюры для каждого участка отдельно (рис. 26П.4).

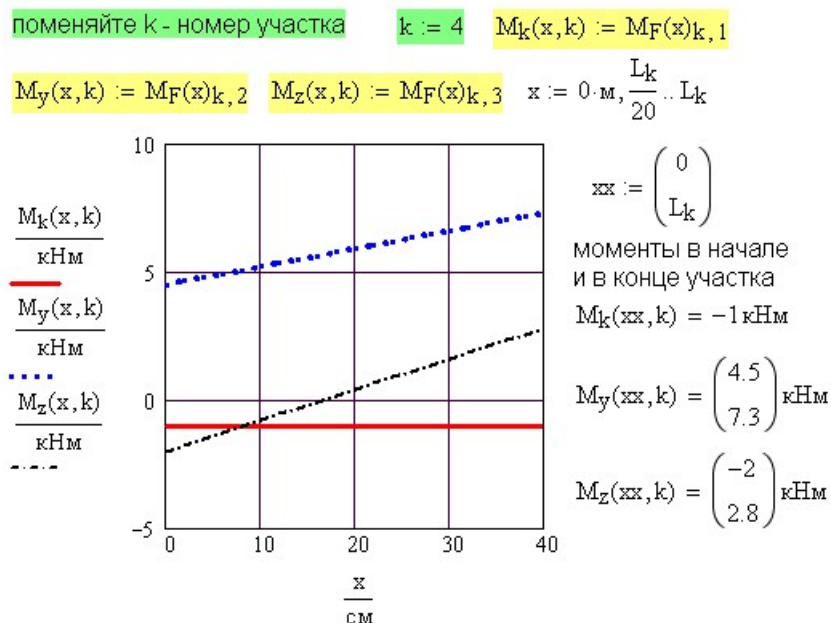


Рис. 26П.4. Эпюры внутренних усилий для стержня, построенные Mathcad

Далее определены геометрические характеристики поперечных сечений стержня (рис. 26П.5). Для первого и второго участков сечение прямоугольное, для третьего и четвертого участков — круглое. Для расчета моментов инерции и моментов сопротивления взяты фрагменты примера 25 (программы [25-slog-sopr1](#)) (рис. 25П.10 и 25П.11). Выражения для моментов инерции J и моментов сопротивления W подправлены с учетом реальных форм поперечного сечения стержня. Расчет предусматривает возможность поворота прямоугольного сечения на 90° , для чего производится переименование J и W .

Характеристики поперечных сечений

прямоугольник $b := 2 \text{ см}$ $hb := 2.5$ $h := b \cdot hb$ меньший размер b параллелен оси z

круг $d := 4 \text{ см}$

Здесь скрыт расчет моментов инерции и моментов сопротивления

если меньший размер прямоугольного сечения параллелен оси y , то выключите эти выражения

$$J_{y1}(k, b, d) := J_z(k, b, d)$$

$$J_z(k, b, d) := J_y(k, b, d)$$

$$J_y(k, b, d) := J_{y1}(k, b, d)$$

$$W_{y1}(k, b, d) := W_z(k, b, d)$$

$$W_z(k, b, d) := W_y(k, b, d)$$

$$W_y(k, b, d) := W_{y1}(k, b, d)$$

Расчет эквивалентных напряжений

$$\sigma_{\text{круг}}(x, k, d) := \frac{\sqrt{M_k(x, k)^2 + M_y(x, k)^2 + M_z(x, k)^2}}{W_y(k, b, d)}$$

$$\sigma_3(x, k, b, d) := \begin{cases} \sigma_{\text{прямоут}}(x, k, b) & \text{if } k < 3 \\ \sigma_{\text{круг}}(x, k, d) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{прямоут}}(x, k, b) := \begin{cases} \sigma_1 \leftarrow \frac{|M_y(x, k)|}{W_y(k, b, d)} + \frac{|M_z(x, k)|}{W_z(k, b, d)} \\ \sigma_2 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_y(x, k)}{W_y(k, b, d)}\right)^2 + 4 \left(\frac{M_k(x, k)}{W_k(k, b, d)}\right)^2} \\ \sigma_3 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_z(x, k)}{W_z(k, b, d)}\right)^2 + 4 \gamma_1 \left(\frac{M_k(x, k)}{W_k(k, b, d)}\right)^2} \\ \max(\sigma) \end{cases}$$

поменяйте k
(номер участка) $k := 2$ $x := 0 \text{ м}, \frac{L_k}{50} \dots L_k$

Рис. 26П.5. Расчет напряжений в Mathcad

Приведенный внизу рис. 26П.5 расчет эквивалентных напряжений для круглых и прямоугольных сечений также скопирован из предыдущей программы 25-slog-sopr1 (рис. 25П.9). А вот расчет максимальных эквивалентных напряжений выполнен проще, чем в примере 25 (рис. 25П.14). Дело в том, что ни одна встроенная функция Mathcad не может определить экстремум функции со скачками и разрывами (рис. 25П.13) и в примере 25 использовалась самодельная функция **Fmax**. Если максимум напряжения определяется на каждом участке отдельно и разрыва функции там нет, то с такой задачей успешно справляется функция **Maximize**. Для определения $\max \sigma_{\text{экр}}$ использована подпрограмма $\max \sigma$, которая определяет максимальное напряжение на каждом участке и выбирает из них большее (рис.26П.6). Этот фрагмент программы важен еще и тем, что показывает возможность использования вычислительного блока с ключевым словом **given** в программных модулях. Подобным образом можно использовать в программах функции **Find**, **Minerr**, **Maximize**, **Minimize**.

Определение максимального эквивалентного напряжения

$$\sigma_{\text{экр}}(x, k) := \sigma_3(x, k, b, d)$$

$$k := 1 \quad x := L_k \cdot 0.5 \quad \text{Given} \quad 0 \text{ м} < x < L_k \quad x_{\text{max}}(k) := \text{Maximize}(\sigma_{\text{экр}}, x)$$

$$\max \sigma := \begin{cases} \text{for } k \in 1..4 \\ \quad x_k \leftarrow x_{\text{max}}(k) \\ \quad \sigma_k \leftarrow \sigma_{\text{экр}}(x_k, k) \\ \quad \sigma_1 \leftarrow \max(\sigma) \\ \quad (\sigma \quad \sigma_1)^T \end{cases}$$

$$\max \sigma_1 = \begin{pmatrix} 720 \\ 821 \\ 382 \\ 1255 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

максимальные напряжения на всех участках

$$\max \sigma_2 = 1255 \text{ МПа} \quad \max \sigma := \max \sigma_2$$

Подбор размеров сечений стержня из условия прочности

для прямоугольного сечения $k := 2$ введите номер участка, где находится опасное сечение

$$b := 1 \text{ см} \quad b := \text{root}(\sigma_{\text{прямоут}}(x, k, b) - \sigma_{\text{доп}}, b) \quad b = 5.803 \text{ см} \quad h := b \cdot hb$$

$$h = 14.506 \text{ см}$$

для круглого сечения $k := 4$ введите номер участка, где находится опасное сечение

$$d := 1 \text{ см} \quad d := \text{root}(\sigma_{\text{круг}}(x, k, d) - \sigma_{\text{доп}}, d) \quad d = 8.171 \text{ см}$$

Рис. 26П.6. Расчет на прочность пространственного стержня

Определение перемещения пространственного стержня.

Перемещения пространственного стержня определяем с помощью интеграла Мора. Грузовая (заданная) система и единичная система для определения горизонтального перемещения конца стержня (сечения В) показаны на рис. 26П.7. Изгибающие моменты для грузовой (заданной) системы $M_F(x)$ приведены на рис. 26П.8 слева. Моменты для единичной системы приведены на рис. 26П.8 справа. Первые столбцы матриц содержат моменты относительно продольной оси x , то есть крутящие моменты. Второй и третий столбцы содержат изгибающие моменты соответственно относительно осей y и z . В одну и ту же матрицу включены

изгибающие и крутящие моменты. Это позволит одним интегральным выражением вычислить все слагаемые, входящие в интеграл Мора. Влиянием продольного усилия и поперечных сил можно пренебречь. Учет их вносит поправку лишь в пятом знаке результата расчета. В оставшихся трех слагаемых разные знаменатели: для изгибающих моментов в знаменателе стоит модуль Юнга E , для крутящих моментов — модуль сдвига G . Чтобы представить три интеграла в виде одного, созданы два вектора: E и J .

$$\Delta = \sum_L \int \frac{M_{yF} \bar{M}_y dx}{E J_y} + \sum_L \int \frac{M_{zF} \bar{M}_z dx}{E J_z} + \sum_L \int \frac{M_{\kappa F} \bar{M}_\kappa dx}{G J_\kappa}$$

На рис. 26П.8 внизу показано определение перемещения. Интеграл Мора в данном примере содержит 12 слагаемых (произведение трех внутренних усилий на четырех участках).

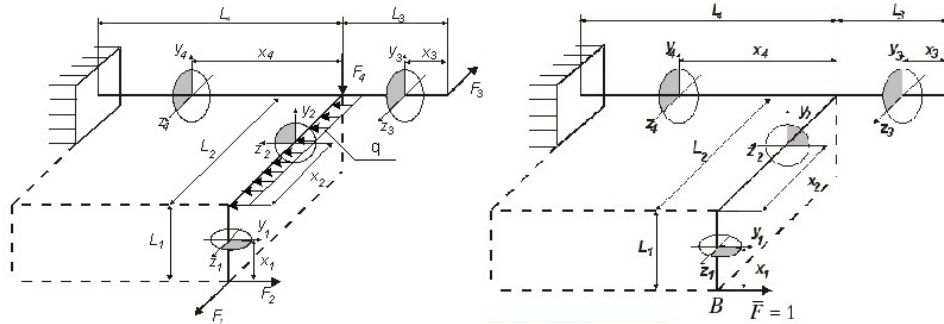


Рис. 26П.7. Грузовая и единичная системы для определения горизонтального перемещения конца стержня

$$M_F(x) := \begin{bmatrix} 0 & -F_1 \cdot x & -F_2 \cdot x \\ -F_2 \cdot L_1 & -F_2 \cdot x + \frac{q \cdot x^2}{2} & -F_1 \cdot L_1 \\ 0 & F_3 \cdot x & 0 \\ -F_1 \cdot L_1 & -F_1 \cdot x + F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot (L_3 + x) - \frac{q \cdot (L_2)^2}{2} & F_3 \cdot x - F_2 \cdot L_1 \end{bmatrix}$$

$$M1(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x \\ -L_1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & -L_1 \end{bmatrix}$$

$m := \text{rows}(L)$

Интеграл Мора

$$E := \begin{bmatrix} G \\ E \\ E \\ E \end{bmatrix} \quad J(k) := \begin{bmatrix} J_k(k, b, d) \\ J_y(k, b, d) \\ J_z(k, b, d) \end{bmatrix}$$

$$\Delta := \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_k} \frac{M_F(x)_{k,i} \cdot (M1(x))_{k,i}}{E_i J(k)_i} dx \quad \Delta = 5.5 \text{ мм}$$

Рис. 26П.8. Матрицы моментов внешних сил, моментов от единичной силы и интеграл Мора для определения горизонтального перемещения конца стержня

Пример 27. Определение перемещений систем из нескольких элементов.

(Программа 27-energ1mcd)

Энергетический метод позволяет определить перемещения любых упругих систем. Для систем, собранных из большого количества элементов сохраняется тот же порядок расчета, но общий объем расчетов многократно увеличивается. Порядок расчета перемещений таких систем следующий:

- Нарисовать грузовую и единичную системы.
- Единичную систему нагрузить единичной силой в точке, где ищем перемещение в направлении перемещения.
- Разделить грузовую и единичную системы на отдельные элементы.
- Определить внутренние усилия в элементах системы для грузового и единичного состояния.
- Определить перемещение с помощью интеграла Мора.

Для определения внутренних усилий в элементах системы ее надо разобрать и рассмотреть силы, действующие на каждый элемент в отдельности.

Интеграл Мора для определения перемещения сложной системы принимает вид

$$\Delta = \sum \frac{N_F \bar{N}}{K_{ст}} + \frac{N_F \bar{N}}{K_{пр}} + \sum \int_L \frac{M_F \bar{M}}{EJ} dx,$$

где первое слагаемое учитывает вклад растяжения стержней в перемещение, второе слагаемое — вклад растяжения пружин и третье вклад изгиба балок.

Определим перемещение системы, состоящей из двух балок, связанных пружиной и стержнем (рис. 27П.1).

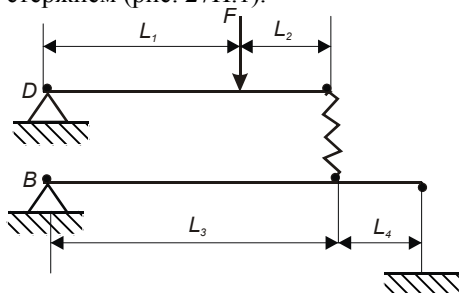


Рис. 27П.1. Заданная система из нескольких элементов

Исходные данные для расчета системы показаны на рис. 27П.2. Все элементы системы стальные. Для балок заданы длины участков L и размеры прямоугольного поперечного сечения b и h . На том же рисунке определены момент инерции J и момент сопротивления W сечения балок. Для стержня длина $L_{ст}$ и размер стороны квадратного поперечного сечения a . Для пружины задана ее жесткость $K_{пр}$.

Исходные данные Нагрузка $F := 5 \cdot \text{кН}$

для стержня Модуль Юнга $E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$

длина стержня $L_{ст} := 20 \cdot \text{см}$

сторона квадратного сечения стержня $a := 5 \cdot \text{мм}$

площадь сечения $A := a^2$ $A = 0.25 \cdot \text{см}^2$

Для балок (сечения двух балок одинаковые)

длины участков балок $L := (20 \ 10 \ 30 \ 10)^T \cdot \text{см}$

$h := 2 \cdot \text{см}$ $b := 4 \cdot \text{см}$ высота и ширина сечения балок

$J := \frac{b \cdot h^3}{12}$ $W := \frac{b \cdot h^2}{6}$ $J = 2.667 \cdot \text{см}^4$ $W = 2.667 \cdot \text{см}^3$

жесткость пружины $K_{пр} := 100 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$

Рис. 27П.2. Исходные данные для расчета перемещений системы из нескольких элементов

В примере определяются два перемещения системы: линейное перемещение точки приложения силы F и угловое перемещение на опоре D .

Для каждого перемещения нарисована своя единичная система (рис. 27П.3).

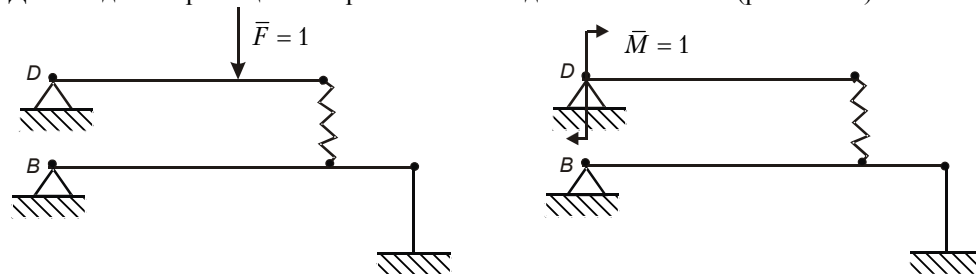


Рис. 27П.3. Единичные системы для определения $\Delta F_{\text{верт}}$ (слева) и θ_D (справа)

Для определения внутренних усилий разберем на отдельные элементы каждую из нарисованных систем (грузовую (заданную) и две единичные) и из уравнений равновесия каждого элемента определим внутренние усилия. Детализировка грузовой и второй единичной системы показаны на рис. 27П.4. Для первой единичной системы усилия пропорциональны усилиям в грузовой системе, так как точки приложения нагрузки и направления нагрузок совпадают.

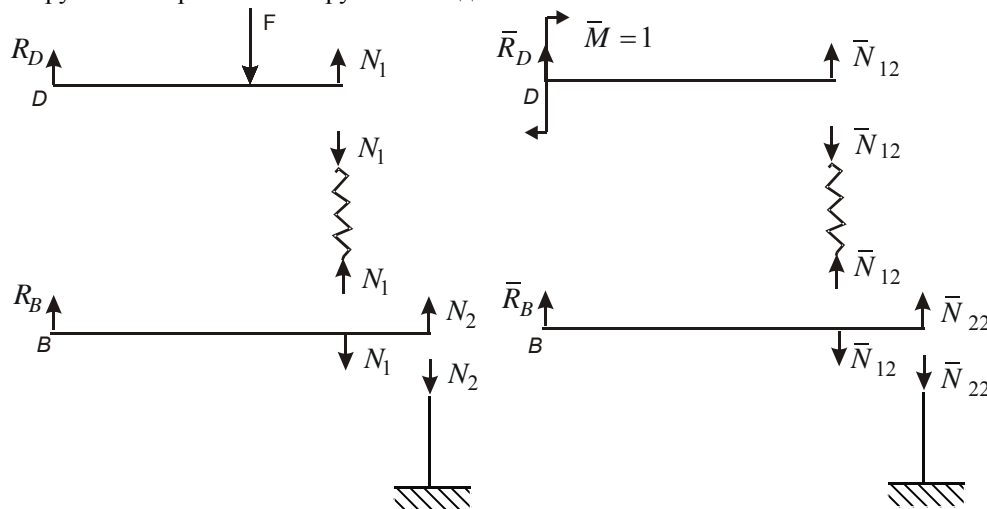


Рис. 27П.4. Разбиение на элементы грузовой и единичной системы для θ_D

Усилия в стержне и пружине для определения перемещения точки приложения силы найдены на рис. 27П.5. Опорные реакции и изгибающие моменты в балках найдены на рис. 27П.6. В отличие от других задач для определения опорных реакций не использовался вычислительный блок [Given-Find](#). Ввиду многообразия возможных систем общего решения для них получить не удастся. Уравнения равновесия проще записать вручную и вставить их в расчет.

ВНИМАНИЕ

Работая с этой программой, запишите вручную уравнения равновесия балок. Проверьте и замените в программе зеленые выражения на соответствующие вашей задаче.

в грузовом состоянии

$$N1 := \frac{F \cdot L1}{L1 + L2} \quad N2 := \frac{N1 \cdot L3}{L3 + L4} \quad N1 = 3.33 \text{ кН} \quad N2 = 2.5 \text{ кН}$$

в единичном состоянии для $\Delta F_{\text{верт}}$

$$N11 := \frac{L1}{L1 + L2} \quad N21 := \frac{N11 \cdot L3}{L3 + L4} \quad N11 = 0.667 \quad N21 = 0.5$$

в единичном состоянии для θ_D

$$N12 := \frac{1}{L1 + L2} \quad N22 := \frac{N12 \cdot L3}{L3 + L4} \quad N12 = 3.333 \text{ м}^{-1} \quad N22 = 2.5 \text{ м}^{-1}$$

Рис. 27П.5. Определение усилий в стержне и пружине для грузовой и единичной систем

Определение опорных реакций балок

в грузовом состоянии

99

$$R_A := F - N1 \quad R_B := N1 - N2 \quad R_A = 1.667 \text{ кН} \quad R_B = 0.833 \text{ кН}$$

в единичном состоянии для $\Delta F_{\text{верт}}$

$$R11_A := 1 - N11 \quad R11_B := N11 - N21 \quad R11_A = 0.333 \quad R11_B = 0.167$$

в единичном состоянии для θ_D

$$R12_A := -N12 \quad R12_B := N12 - N22 \quad R12_A = -3.333 \text{ м}^{-1} \quad R12_B = 0.833 \text{ м}^{-1}$$

Изгибающие моменты на 4-х участках 2-х балок

от внешних сил от единичной силы $\bar{F} = 1$ от единичного момента $\bar{M} = 1$

$$M(x) := \begin{pmatrix} R_A \cdot x \\ N1 \cdot x \\ R_B \cdot x \\ N2 \cdot x \end{pmatrix} \quad M11(x) := \begin{pmatrix} R11_A \cdot x \\ N11 \cdot x \\ R11_B \cdot x \\ N21 \cdot x \end{pmatrix} \quad M12(x) := \begin{pmatrix} R12_A \cdot x \\ N12 \cdot x \\ R12_B \cdot x \\ N22 \cdot x \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n := \text{rows}(L) \\ n = 4 \end{matrix}$$

Рис. 27П.6. Определение опорных реакций и изгибающих моментов для грузовой и единичных систем

Подставив найденные усилия в интеграл Мора находим искомые перемещения $\Delta F_{\text{верт}}$ и θ_D . На рис. 27П.7 показано определение этих перемещений. Там же найдено максимальное напряжение в балках системы.

статическое перемещение точки приложения силы $\Delta F_{\text{верт}}$

$$\Delta_F := \frac{N1 \cdot N11}{K_{\text{пр}}} + \frac{N2 \cdot N21}{E \cdot A} \cdot L_{\text{ст}} + \sum_{k=1}^n \int_0^{L_k} \frac{M(x) \cdot M11(x)}{E \cdot J} dx \quad \Delta_F = 31.9 \text{ мм}$$

определение угла поворота заданной точки D θ_D

$$\theta_D := \frac{N1 \cdot N12}{K_{\text{пр}}} + \frac{N2 \cdot N22}{E \cdot A} \cdot L_{\text{ст}} + \sum_{k=1}^n \int_0^{L_k} \frac{M(x) \cdot M12(x)}{E \cdot J} dx \quad \theta_D = 8 \text{ град}$$

максимальное напряжение в балках

$$\max M := \max \left(\begin{pmatrix} R_A \cdot L_1 \\ R_B \cdot L_3 \end{pmatrix} \right) \quad \max \sigma := \frac{\max M}{W} \quad \max \sigma = 125 \text{ МПа}$$

Рис. 27П.7. Определение перемещений системы из нескольких элементов

Надо сказать, что расчеты в этом примере простые и использование Mathcad необязательно. Универсальную программу для расчета сложных систем составить невозможно ввиду многообразия вариантов набора элементов. Расчеты простые, но их очень много. Таким же образом, разбивая систему на элементы, можно решить и статически неопределимую систему, но объем расчетов при этом значительно возрастет.

Пример 28. Раскрытие статической неопределимости плоской рамы.

(Программа 28-energ2.mcd)

Задана плоская рама (рис. 28П.1 слева), состоящая из двух прямолинейных и одного криволинейного участка. Рама три раза статически неопределима.

Отбросив правую заделку, получаем статически определимую основную систему. Нагрузим основную систему всеми внешними силами. Действие отброшенных связей заменяем неизвестными силами X_1, X_2, X_3 , получаем эквивалентную систему (рис. 28П. справа).

Система канонических уравнений метода сил для три раза статически неопределимой системы имеет вид

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1F} = 0$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2F} = 0.$$

$$X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3F} = 0$$

Для вычисления коэффициентов податливости $\delta_{i,j}$ и перемещений основной системы от внешних сил нарисует 4 вспомогательных системы: грузовую, нагруженную только внешними силами (рис. 28П.2 слева), и 3 единичные системы, каждая из которых нагружена одной единственной единичной силой $X_i = 1$. На рис. 28П.2 справа все три единичные системы объединены в одну схему.

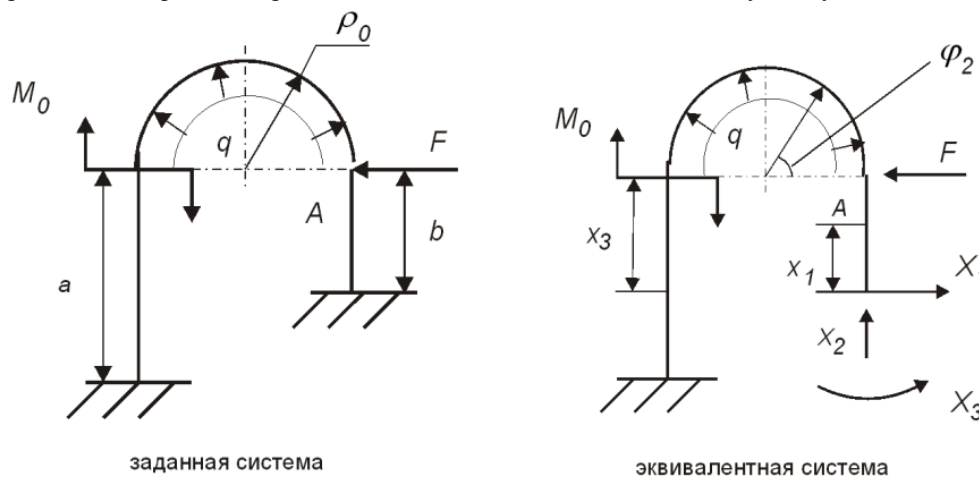


Рис. 28П.1. Заданная система и эквивалентная ей система

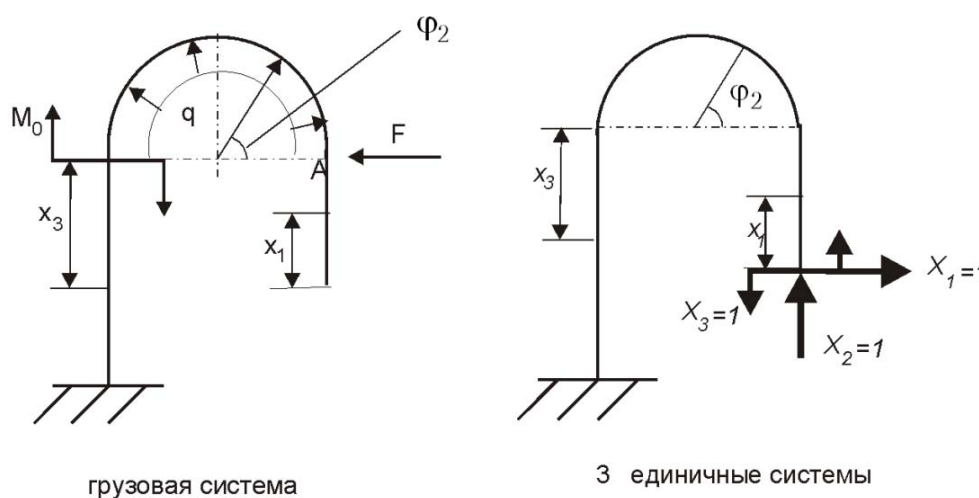


Рис. 28П.2. Грузовая система и 3 единичные системы на одной схеме

..

На каждом участке выбираем произвольное сечение. Положение выбранных сечений отмечаем координатами x_1, φ_2, x_3 , строго одинаково для всех систем.

Исходные данные для расчета приведены на рис. 28П.3. Заданы размеры рамы, материал — сталь (задан модуль Юнга E).

Исходные данные заданы глобально в конце программы

для расчета без нагрузок
включите эти выражения

$$F := 0 \quad q := 0 \quad M_0 := 0$$

$J := 10 \text{ см}^4$ момент инерции сечения
 $n := 3$ степень статической неопределимости
 $m := 3$ число участков

ρ - радиус кривизны (для прямых участков $\rho=1$)

$k := 1..m$ $\rho_k := 1$ $\rho_2 := \rho_0$

температурное расширение

$$\Delta L_t := \begin{bmatrix} 2 \cdot \rho_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t \\ (a - b) \cdot \alpha \cdot \Delta t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{по направлению X1} \\ \text{по направлению X2} \\ \text{по направлению X3} \end{array}$$

Рис. 28П.3. Исходные данные для расчета плоской рамы

Расчет ведется без использования размерностей. Это связано с тем, что некоторые матрицы, используемые в ходе расчета, содержат члены разной размерности, например, силы и пары сил. Mathcad считает это ошибкой. Далее в программе размерности вписаны от руки просто для справки.

Кроме внешних нагрузок на перемещения системы влияют приращение температуры и монтажная ошибка при сборке. Заданы приращение температуры Δt и коэффициент линейного расширения α , монтажная ошибка при сборке по направлениям действия X_1 и X_2 . Определяются перемещения основной системы под действием приращения температуры ΔL_t .

Изгибающие моменты от действия внешних сил записаны в виде вектора (рис. 28П.4). Изгибающие моменты от действия единичных сил $X_i = 1$ записаны в виде матрицы размерностью $m \times n$, где n — степень статической неопределимости, m — число участков основной системы.

изгибающие моменты от внешних сил

$$M_F(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ -F \cdot \rho_0 \cdot \sin(x) + q \cdot \rho_0^2 \cdot (1 - \cos(x)^2) \\ F \cdot x + (q \cdot 2 \cdot \rho_0^2) - M_0 \end{bmatrix}$$

изгибающие моменты от единичных сил

$$M1(x) := \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ b + \rho_0 \cdot \sin(x) & \rho_0 \cdot (1 - \cos(x)) & 1 \\ b - x & 2 \cdot \rho_0 & 1 \end{bmatrix}$$

коэффициенты податливости $i := 1..n$ $j := 1..n$

$$\delta_{i,j} := \sum_{k=1}^m \left(\rho_k \int_0^{L_k} \frac{M1(x)_{k,i} \cdot M1(x)_{k,j}}{E \cdot J} dx \right)$$

$$\delta = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1.36 \cdot 10^{-3} & 5.64 \cdot 10^{-4} & 5.89 \cdot 10^{-5} \\ 2 & 5.64 \cdot 10^{-4} & 4.36 \cdot 10^{-4} & 2.57 \cdot 10^{-5} \\ 3 & 5.89 \cdot 10^{-5} & 2.57 \cdot 10^{-5} & 3.07 \cdot 10^{-6} \end{array}$$

$$\Delta F_i := \sum_{k=1}^m \left(\rho_k \int_0^{L_k} \frac{M_F(x)_k \cdot M1(x)_{k,i}}{E \cdot J} dx \right)$$

$$\Delta F = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 1.23 \cdot 10^{-2} \\ 2 & 1.04 \cdot 10^{-2} \\ 3 & 6.29 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

Решение системы канонических уравнений метода сил

$$X := -\delta^{-1} (\Delta F + \Delta L_t + \Delta)$$

| | |
|---|--------|
| | 1 |
| 1 | -72.19 |
| 2 | 226.62 |
| 3 | -717.1 |

кг
 кг
 кгсм

Рис. 28П.4. Раскрытие статической неопределимости плоской рамы методом сил

Выражения для расчета коэффициентов податливости и перемещений от внешних сил записаны в программе в соответствии с формулами метода сил. Рядом выведены результаты их расчета.

Выражения интеграла Мора для прямолинейных и криволинейных брусьев одинаковы

$$\Delta = \int_L \frac{M_F \bar{M}}{EJ} ds.$$

Но для прямолинейных брусьев $ds = dx$, для криволинейных $ds = \rho d\varphi$.

Для единообразия выражений в Mathcad обозначим элемент длины любого бруса dx . Тогда для кривых брусьев $x = \varphi$ — угловая координата, а в интеграле Мора появляется дополнительный множитель ρ .

Формула получается общей, если для прямолинейных брусьев поставить $\rho = 1$.

В нашей задаче вектор значений ρ задается в исходных данных (рис. 28П.3) и входит множителем в выражения для перемещений (рис. 28П.4).

Система канонических уравнений метода сил решается путем обращения матрицы коэффициентов податливости δ .

$$X = \delta^{-1} \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta = \Delta_F + \Delta_{L_t} + \Delta_{\text{монт}}.$$

Результаты расчета неизвестных сил выведены в численном виде и в виде коэффициентов при буквенном выражении. В данном случае $\frac{Fa^3}{EJ}$.

Перемещение точки А (угол поворота)

$$M_A(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{изгибающие моменты} \\ \text{от единичной силы,} \\ \text{приложенной в точке А,} \\ \text{где ищем перемещение} \end{array}$$

$$M_{\text{ЭКВ}}(x, k) := M_F(x)_k + \sum_{i=1}^n (X_i \cdot M1(x)_k, i)$$

$$\theta_a := \sum_{k=1}^m \left[\rho_k \int_0^{L_k} (M_{\text{ЭКВ}}(x, k)) \cdot \frac{M_A(x)_k}{E \cdot J} dx \right]$$

это выражение не работает в Mathcad 11

$$\theta_a := \sum_{k=1}^m \left[\rho_k \int_0^{L_k} \left[M_F(x)_k + \sum_{i=1}^n (X_i \cdot M1(x)_k, i) \right] \cdot \frac{M_A(x)_k}{E \cdot J} dx \right]$$

$$\theta_a = 0.08245 \text{ deg} \quad (\text{в градусах})$$

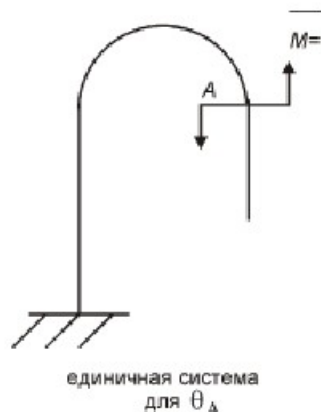


Рис. 28П.5. Определение перемещения плоской статически неопределимой рамы

На рисунке 28П.5 показано определение перемещения заданной точки А эквивалентной системы. Изгибающие моменты от единичного момента (для определения угла поворота) определяются по схеме на рис. 28П.5. Изгибающие моменты для эквивалентной системы определяются по формуле

$$M_{\text{ЭКВ}} = M_F + \sum_{i=1}^n X_i \bar{M}_i \quad \text{и в виде функции пользователя подставляются в интеграл}$$

Мора.

ПРЕДУПРЕЖДЕНИЕ

В версии Mathcad 11 выражение интеграла Мора с $M_{\text{ЭКВ}}$, записанным, как функция пользователя не работает. Необходимо скопировать развернутое выражение $M_{\text{ЭКВ}}$ и подставить его под интеграл вместо $M_{\text{ЭКВ}}(x, k)$. В предыдущей версии Mathcad 2001i и в Mathcad 13 – 15 выражение проходит нормально.

Числовой результат для угла поворота выводится в радианах. Чтобы перевести его в градусы, надо вписать deg в поле ввода размерности справа от числового результата.

Для проверки правильности нахождения неизвестных сил определяется перемещение эквивалентной системы, взятой при другом раскреплении (была заделка слева, теперь заделка справа). Саму эквивалентную систему можно не рисовать. Внутренние усилия в любой эквивалентной системе должны быть одинаковы (такие же, как в заданной системе). Они уже найдены (рис.28П.5).

Нужно нарисовать единичную систему при новом раскреплении, и определить усилия от единичной силы. На рисунке 28П.6 нарисованы одновременно три единичные силы для определения трех перемещений. Изгибающие моменты от

каждой единичной силы объединены в одну матрицу $MB(x)$ (рис. 28П.6), что позволяет в одном математическом выражении определить сразу три перемещения. Критерием правильности решения является равенство нулю всех перемещений по направлениям отброшенных связей.

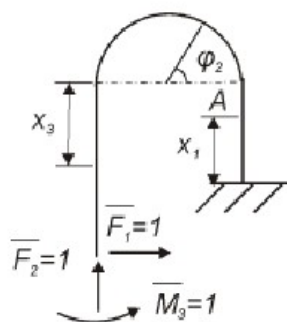
должно быть $\Delta_{\text{верт}} = 0$ $\Delta_{\text{гориз}} = 0$ $\theta = 0$

$$MB(x) := \begin{bmatrix} a - b + x & 2 \cdot \rho_0 & 1 \\ 1 \cdot (a + \rho_0 \cdot \sin(x)) & \rho_0 + \rho_0 \cdot \cos(x) & 1 \\ -x + a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Во всех трех случаях должно быть $\Delta = 0$

несмотря на другое раскрепление, координату x берем ту же, что и в исходных моментах

$$\Delta_j := \sum_{k=1}^m \left[\rho_k \cdot \int_0^{L_k} \left[M_F(x)_k + \sum_{i=1}^n (X_i \cdot M1(x)_{k,i}) \right] \cdot \frac{MB(x)_{k,j}}{E \cdot J} dx - \Delta L_{t_j} - \Delta_j \right] \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



3 единичные системы
для проверки
 $j := 1..n$

Рис. 28П.6. Проверка правильности решения задачи

При действии только внешних сил этот критерий справедлив всегда, при любой геометрии системы и любых сочетаниях нагрузок

При воздействии перепада температуры и монтажных погрешностей указанный критерий выполняется не всегда, что связано, по-видимому, с появлением неопределенных угловых смещений, сопровождающих линейные смещения в местах отброшенных связей. Сложности, сопровождающие проверку в этих случаях, выходят за рамки курса сопротивления материалов.

Рекомендуем при проверке решения положить $\Delta t = 0$ и $\Delta_{\text{монт}} = 0$.

результаты расчета

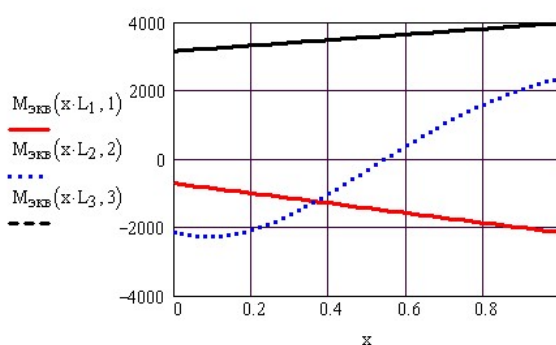
$$X = \begin{pmatrix} -72.186 \\ 226.615 \\ -717.098 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_F = \begin{pmatrix} 0.012348 \\ 0.010442 \\ 0.000629 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x := 0, 0.02..1$



исходные данные
заданы глобально

$$F = 10 \text{ кг}$$

$$q = 4 \frac{\text{кг}}{\text{см}}$$

$$M_0 = 20 \text{ кгсм}$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

длины участков

$$L = \begin{pmatrix} b \\ \pi \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a = 10 \text{ см} \\ b = 20 \text{ см} \\ \rho_0 = 10 \text{ см} \end{pmatrix}$$

$$\Delta t = 0 \text{ градусов}$$

монтажный зазор

$$\alpha = 12.5 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0.0 \\ -0.05 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см}$$

Поменяйте исходные данные и посмотрите результаты расчета

Рис. 28П.7. Вывод результатов расчета

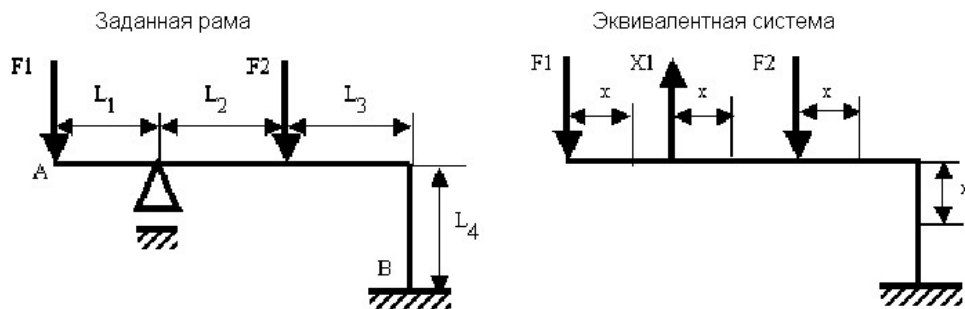
Для анализа результатов расчета рекомендуем исходные данные задать глобально в конце программы, там же вывести результаты расчета и, меняя исходные данные, наблюдать результаты расчета (рис. 28П.7).

Пример 29. Расчет один раз статически неопределимой системы.

(Программа 29-energ3.mcd)

В примере 28 рассмотрен расчет прочности три раза статически неопределимой рамы под действием внешних сил, изменения температуры и монтажных ошибок. Решим гораздо более простую задачу.

Рассмотрим один раз статически неопределимую раму, находящуюся под действием только двух внешних сил (рис. 29П.1). Как ни странно, но расчет такой рамы в Mathcad сложнее, чем расчет три раза статически неопределимой рамы. Он требует дополнительной корректировки приведенной в электронной книге программы [28-energ2](#). Система канонических уравнений в этом случае вырождается в одно уравнение, в котором остается только одно неизвестное вместо вектора неизвестных. Mathcad не принимает число как матрицу размерностью 1×1 , поэтому в программу придется внести изменения, заменяя вектор неизвестных скаляром (числом).



Этот расчет почти аналогичен предыдущему примеру. Особенность задачи в том, что здесь неизвестная сила одна X_1 . Mathcad не принимает число 1 как матрицу 1×1 , поэтому во всех формулах приходится убирать индекс при X_i .

Рис. 29П.1. Расчетная схема рамы

В данном примере покажем как использовать электронную книгу для решения своих собственных задач. Чтобы использовать Mathcad для решения задачи, необходимо предварительно основательно продумать решение задачи и подготовить вручную все необходимые расчетные схемы (а их тут много), определить реакции опор и выписать уравнения изгибающих моментов для всех участков всех систем. Допустим, все это уже сделано. Приступаем к составлению расчетной программы.

Открываем в электронной книге пример 28 ([Расчет плоской рамы методом сил](#)). Просматриваем пример, прикидывая, как его приспособить к нашей задаче. Затем копируем его целиком в свой документ, вырезаем словесные пояснения и приступаем к правке.

Вводим свои исходные данные. В предыдущем примере они введены глобально внизу у графика. Обойдемся без глобального ввода (рис. 29П.2). Лишним для нас является радиус кривизны ρ , необходимый для расчета кривых брусьев. Но он входит в формулы перемещений, и лучше эти формулы не трогать. Для всех прямых участков полагаем $\rho = 1$.

В большинстве случаев не требуется учитывать воздействие изменения температуры и погрешности сборки, поэтому расчет выполняется без учета температурных и монтажных напряжений. Есть два способа не учитывать их: во-первых, принять изменение температуры $\Delta t = 0$ и монтажный зазор $\Delta = 0$, во-вторых, просто вырезать Δt и Δ из уравнения метода сил (рис. 29П.3) и из выражения перемещения точки A (рис. 29П.4). Все остальное оставляем неизменным.

Вводим степень статической неопределимости $n = 1$ и число участков $m = 4$ (см. рис. 29П.2). Вводим изгибающие моменты для грузовой и единичной систем (рис. 29П.3). Не забудьте вписать свои изгибающие моменты для единичной силы при определении перемещения точки A и при новом раскреплении системы для проверки правильности решения задачи (рис. 29П.4 и 29П.5). Смотрим результаты расчета.

$$L := \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \quad \text{Длины участков рамы} \quad \text{Модуль Юнга} \quad E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$$

Нагрузки заданы глобально около графика результатов расчета

$$J := 1 \cdot \text{см}^4 \quad \text{момент инерции сечения рамы задан только для наглядности расчетов (диаметр рамы не известен)}$$

Подготовка к решению канонического уравнения метода сил

$$\text{Каноническое уравнение метода сил} \quad X_1 \cdot \delta_{1,1} + \Delta_{1,F} = 0$$

$$n := 1 \quad \text{степень статической неопределимости}$$

$$m := 4 \quad \text{число участков} \quad k := 1..m$$

$$\rho \quad \text{— радиус кривизны (для прямых участков } \rho=1) \quad \rho_k := 1$$

Рис. 29П.2. Ввод размерностей и исходных данных для расчета

изгибающие моменты от внешних сил

$$M_F(x) := \begin{bmatrix} F_1 \cdot x \\ F_1 \cdot (L_1 + x) \\ F_1 \cdot (L_1 + L_2 + x) + F_2 \cdot x \\ F_1 \cdot (L_1 + L_2 + L_3) + F_2 \cdot L_3 \end{bmatrix}$$

изгибающие моменты от единичных сил

$$M_1(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ -x \\ -(L_2 + x) \\ -(L_2 + L_3) \end{bmatrix}$$

$$\text{коэффициенты податливости} \quad i := 1..n \quad j := 1..n$$

$$\delta_{i,j} := \sum_{k=1}^m \rho_k \int_0^{L_k} \frac{M_1(x)_{k,i} \cdot M_1(x)_{k,j}}{E \cdot J} dx$$

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 1 & 0.05 \end{bmatrix} \frac{\text{мм}}{\text{Н}}$$

$$\Delta_{F_i} := \sum_{k=1}^m \rho_k \int_0^{L_k} \frac{M_F(x)_k \cdot M_1(x)_{k,i}}{E \cdot J} dx$$

$$\Delta_F = \begin{bmatrix} 1 & -0.98 \\ 1 & -0.98 \end{bmatrix} \text{мм}$$

Решение канонического уравнения

$$X := -\delta^{-1} \cdot \Delta_F$$

$$X = 18.19 \text{ Н}$$

Рис. 29П.3. Ввод изгибающих моментов и определение «лишней» опорной реакции X

$$M_A(x) := \begin{bmatrix} x \\ (L_1 + x) \\ (L_1 + L_2 + x) \\ (L_1 + L_2 + L_3) \end{bmatrix}$$

изгибающие моменты от вертикальной единичной силы, приложенной в точке А, где ищем перемещение

Изгибающие моменты для эквивалентной системы

$$M_{\text{ЭКВ}}(x,k) := M_F(x)_k + \sum_{i=1}^n (X \cdot M_1(x)_{k,i})$$

удален индекс X_i

Перемещение точки А

$$\Delta_A := \sum_{k=1}^m \left[\rho_k \int_0^{L_k} \left[M_F(x)_k + \sum_{i=1}^n (X \cdot M_1(x)_{k,i}) \right] \cdot \frac{M_A(x)_k}{E \cdot J} dx \right]$$

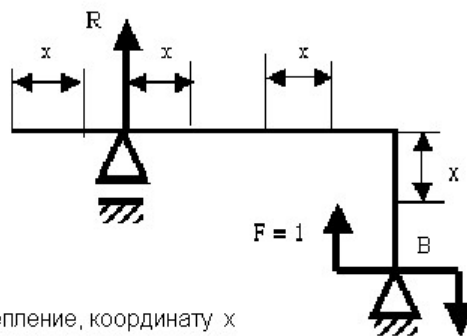
$$\Delta_A = 0.032 \text{ мм}$$

Рис. 29П.4. Определение перемещения в точке А

Проверка (раскрепление справа) должно быть $\theta_B = 0$

$$R := \frac{-1}{L_2 + L_3}$$

$$MB(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ R \cdot x \\ R \cdot (L_3 + x) \\ R \cdot (L_3 + L_2) \end{bmatrix}$$



несмотря на другое раскрепление, координату x берем ту же, что и в исходных моментах

$$\Delta := \sum_{k=1}^m \left[\rho_k \int_0^{L_k} \left[M_F(x)_k + \sum_{i=1}^n (X \cdot M1(x)_{k,i}) \right] \cdot \frac{MB(x)_k}{E \cdot J} dx \right]$$

$j := 1..n$
угол поворота
в сечении B

$$\Delta = 0$$

удален индекс при X_i

Рис. 29П.5. Проверка правильности решения

Удобный для анализа вывод результатов расчета

результаты расчета

Проверка

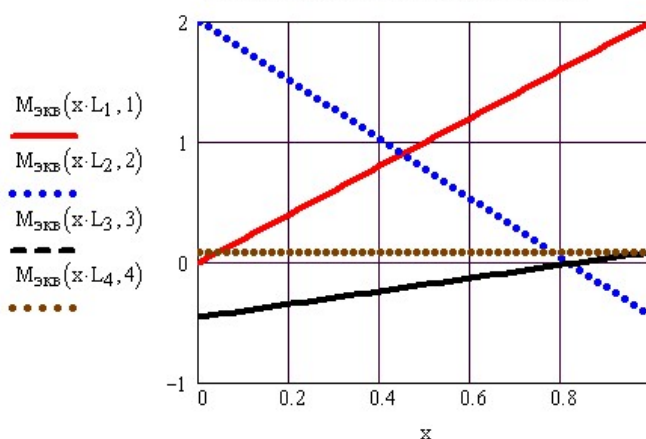
$$X = 18.194 \text{ Н}$$

$$\Delta_F = (-0.9825) \text{ мм}$$

$$\Delta = 0$$

$$x := 0, 0.02..1$$

Эпюры $M_{эkv}$ для всех 4-х участков



Проверка -
моменты на
границах
участков
равны

$$F1 = 10 \cdot \text{Н}$$

$$F2 = 10 \cdot \text{Н}$$

Глобально
заданные
внешние
силы

Поменяйте нагрузки F1 и F2 и посмотрите результаты расчета

Рис.29П.6. Результаты расчета

Чаще всего в результате расчета требуется определить прочные размеры сечения рамы. Эту часть расчета проще и быстрее выполнить вручную. Посмотрев на эпюры изгибающих моментов (рис. 29П.6), нужно выбрать опасное сечение, выбрать максимальное $\sigma_{эkv}$ и из условия прочности найти прочные размеры сечения рамы (в нашем случае диаметр).

Если есть время и очень хочется, то можно определить размеры сечения в Mathcad. В электронной книге откройте пример 26 ([расчет пространственного стержня на сложное сопротивление](#)). Скопируйте заключительную часть программы, пункты: [Определение максимального эквивалентного напряжения и подбор размеров сечения стержня из условия прочности](#) (рис. 26П.6). Вместо максимального напряжения найдем максимальный момент. Поменяем во всех выражениях σ на M . Подпрограмма, использующая вычислительный блок **Given – Maximize**, выводит максимальные значения момента на каждом участке и наибольший из них, который пойдет в расчет на прочность. Далее из условия прочности находим диаметр сечения рамы (рис. 29П.7).

$$\begin{aligned}
 k &:= 1 \quad x := L_k \cdot 0.5 \quad \text{Given} \quad 0 \cdot m < x < L_k \quad x_{\max}(k) := \text{Maximize}(M_{\text{ЭКВ}}, x) \\
 \max M &:= \begin{cases} \text{for } k \in 1..4 \\ \quad x_k \leftarrow x_{\max}(k) \\ \quad M_k \leftarrow M_{\text{ЭКВ}}(x_k, k) \\ \quad M1 \leftarrow \max(M) \\ \quad (M \quad M1)^T \end{cases} \quad \max M_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.08 \\ 0.08 \end{pmatrix} H_m \\
 \max M_2 &= 2 H_m \quad \max M := \max M_2
 \end{aligned}$$

опасное сечение в конце 2-го участка

Подбор размеров сечений стержня из условия прочности

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{доп}} &:= 100 \cdot \text{МПа} \quad \text{допускаемое напряжение} \\
 D &:= 1 \cdot \text{см} \quad D := \text{root}\left(\frac{\max M}{0.1 \cdot D^3} - \sigma_{\text{доп}}, D\right) \quad D = 5.848 \text{ мм}
 \end{aligned}$$

Рис. 29П.7. Расчет рамы на прочность

Обратите внимание: в примере 28 задача решалась без учета размерностей, а этот пример — с учетом размерностей. Дело в том, что Mathcad требует, чтобы при учете размерностей все элементы матриц имели одинаковые размерности.

В предыдущем примере неизвестными являлись сила и пара сил, имеющие разные размерности. Соответственно, и коэффициенты податливости имели разные размерности. Отсюда и запрет на использование размерностей. Mathcad требует, чтобы размерности всех элементов матрицы были одинаковыми. В нашем примере одна неизвестная сила, соответственно, и размерности всех элементов всех матриц одинаковые.

В данном конкретном примере расчет выполняется с учетом размерностей. В общем случае этого нельзя сделать, так как неизвестными в методе сил являются линейные и угловые перемещения. Если вам хочется украсить свой расчет учетом размерностей, то это совсем несложно.

В электронной книге везде, где это возможно, расчеты выполняются с учетом размерностей. В любом примере выделите производные размерности и перенесите их в свой документ. Исходные данные в своем документе умножьте на выбранную производную размерность.

Но Mathcad отказывается выполнять расчет. Проблема заключается в глобальном присвоении численных значений сил F_1 и F_2 . Начиная работу с документом, Mathcad просматривает весь документ в поисках глобальных присвоений значений.

Обнаружив F_1 и F_2 с неизвестными размерностями, он указывает на ошибку, ведь производные размерности он еще не прочитал. Чтобы выйти из этого положения, нужно умножить значения F_1 и F_2 на стандартные размерности *на английском языке*, заложенные в алгоритм Mathcad.

Просмотрите результаты расчета и там, где надо, впишите в поле ввода рядом с числовыми ответами свои производные размерности. Для окончательного украшения документа подцветите фоном наиболее важные операторы, выбрав в контекстном меню **Properties** ► **Highlight Region** ► **Choose Color**.

Пример 30. Расчет пространственной статически неопределимой рамы.

(Программа 30-energ4.mcd)

Для заданной пять раз статически неопределимой пространственной рамы требуется раскрыть статическую неопределимость и сделать проверку правильности решения, выбрать опасное сечение и определить диаметр стержней рамы из условия прочности.

Пространственная рама имеет 4 взаимно перпендикулярных участка. Опорами рамы являются слева — заделка, справа — сферическая шарнирная опора, внизу — ось вращения вокруг горизонтальной оси, допускающая перемещение вдоль этой оси (рис. 30П.1 а).

В качестве основной системы выбираем раму с заделкой слева. Отбрасываем шарнирные опоры (рис. 30П.1, б). На этом же рисунке выбраны произвольные сечения на каждом участке и показаны оси координат. Ось x на всех участках направлена вдоль оси стержня.

В каждом выбранном сечении показана первая четверть. Чтобы не запутаться со знаками, изгибающие моменты, вызывающие растяжение в первой четверти сечений (где сходятся положительные направления осей) считаем положительными.

Действие отброшенных связей заменяем неизвестными силами. Эквивалентная система, нагруженная всеми внешними силами и реакциями отброшенных связей, показана на рис. 30П.1, в.

Для определения перемещений используются грузовая система, нагруженная всеми внешними силами (рис. 30П.1, г) и 5 единичных систем (рис. 30П.1, д), каждая из которых нагружена одной единственной силой $X_i = 1$.

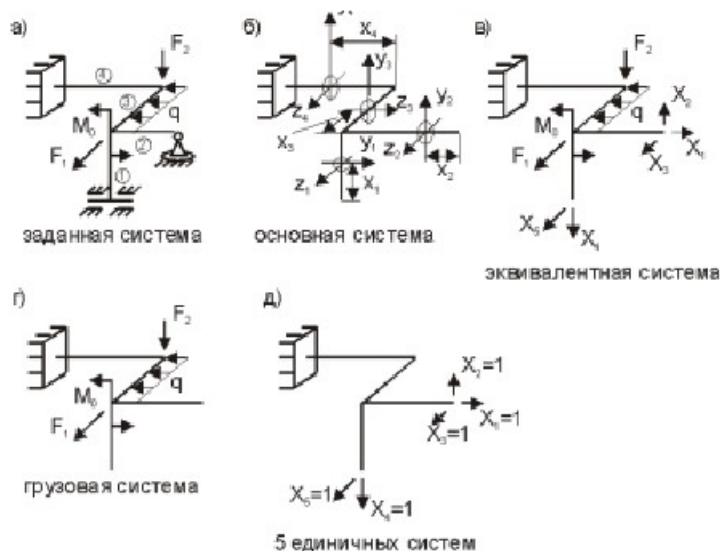


Рис. 30П.1. Расчетные схемы для пространственной стержневой системы

Исходные данные для расчета показаны на рис. 30П.2. кроме внешних нагрузок, задано повышение температуры $\Delta t = 50$ градусов.

Рама представляет собой стальной стержень круглого поперечного сечения. Для проведения расчетов в качестве первого приближения задан диаметр стержня $d = 1$ см.

В конце расчета значение диаметра определяется из условия прочности.

Кроме внешних нагрузок и повышения температуры на напряжения в стержнях влияет и монтажная ошибка при сборке рамы $\Delta_{\text{монт}}$. Величину этой монтажной ошибки можно задать по каждому направлению отброшенной связи (рис. 30П.11 — глобальное задание переменных вблизи вывода результатов расчета).

На рис. 30П.3 определены геометрические характеристики поперечных сечений на каждом участке рамы. Характеристики эти могут быть различными для разных участков, в том числе и переменными (в виде функции от x).

Расчет без учета размерностей
ввод чисел в кг и см

$$E := 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad G := 8 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \alpha := 12.5 \cdot 10^{-6}$$

для расчета без нагрузок
включите эти выражения

$$F_1 := 0 \quad F_2 := 0 \quad q := 0 \quad M_0 := 0$$

$n := 5$ степень статической неопределимости

$m := 4$ число участков

Остальные исходные данные заданы
глобально в конце программы

Рис. 30П.2. Исходные данные для расчета пространственной стержневой системы

$$AA := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad J := \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad J_p := \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

площади сечений моменты инерции

$$A := \begin{pmatrix} AA \\ AA \\ AA \\ AA \end{pmatrix} \quad J := \begin{pmatrix} J_p & J & J \\ J_p & J & J \\ J_p & J & J \\ J_p & J & J \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} G \\ E \\ E \end{pmatrix}$$

Рис. 30П.3. Геометрические характеристики сечений

температурное расширение изгибающие моменты от внешних сил

$$\Delta L_t := \begin{pmatrix} \alpha \cdot \Delta t \cdot (L_2 + L_4) \\ 0 \\ \alpha \cdot \Delta t \cdot L_3 \\ \alpha \cdot \Delta t \cdot L_1 \\ \alpha \cdot \Delta t \cdot L_3 \end{pmatrix} \quad M_F(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & q \cdot \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & -F_1 \cdot x - q \cdot \frac{(L_3)^2}{2} & F_2 \cdot x - M_0 \end{pmatrix}$$

изгибающие моменты от единичных сил

$$M_1(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & L_3 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ L_2 & 0 & -x \\ -L_3 & 0 & -L_2 - x \end{pmatrix} \quad M_3(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & -L_2 - x & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ L_3 & 0 & x \end{pmatrix} \quad M_5(x) := \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_1 \\ -L_1 & -x & 0 \end{pmatrix} \quad M1(x) := \begin{pmatrix} M_1(x) \\ M_2(x) \\ M_3(x) \\ M_4(x) \\ M_5(x) \end{pmatrix}$$

Рис. 30П.4. Моменты от внешних и единичных сил

Обратите внимание, что модуль Юнга E задан в виде вектора из трех значений G, E, E . Сделано это для единообразия выражений интеграла Мора при кручении и при изгибе. При кручении (вокруг оси x) в знаменателе формулы стоит модуль сдвига G , при изгибе модуль Юнга E .

На рисунке 30П.4 приведены внутренние усилия от внешних сил $M_F(x)$ и усилия от каждой из пяти единичных сил $M_i(x)$ в виде матриц. Первые столбцы этих матриц

представляют собой крутящие моменты (вокруг оси x), вторые столбцы — изгибающие моменты вокруг оси y и третьи столбцы — изгибающие моменты вокруг оси z .

Продольными усилиями в расчетах пренебрегаем. Решение этой задачи с учетом продольных усилий показало, что перемещения от продольных усилий примерно в тысячу раз меньше, чем от изгибающих или крутящих моментов. К тому же при учете продольных усилий каждый интеграл Мора приходится записывать в виде четырех слагаемых, и задача теряет свою краткость и элегантность.

Для универсальности формул и краткости записи алгоритма решения задачи моменты от всех пяти единичных сил $M_i(x)$ объединены в вектор $M1(x)$, представляющий собой аналог трехмерного массива. Каждый член этого вектора является матрицей.

На том же рисунке 30П.4 вверху приведены перемещения точек приложения реакций отброшенных связей в направлении этих реакций при нагревании рамы на Δt градусов.

На рисунке 30П.5 приведены общие формулы для определения коэффициентов податливости $\delta_{i,j}$ и перемещений от внешних сил Δ_{Fi} . Каждое выражение представляет собой сумму из 12 интегралов (по 4-м участкам и по трем усилиям M_x, M_y, M_z).

$$\delta_{i,j} := \sum_{k=1}^m \sum_{jj=1}^3 \int_0^{L_k} \frac{(M1(x)_i)_{k,jj} \cdot (M1(x)_j)_{k,jj}}{E_{jj} \cdot J_{k,jj}} dx$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0.367 & 0 & -0.413 & 0 & -0.138 \\ 0 & 1.013 & 0 & -0.619 & 0.321 \\ -0.413 & 0 & 0.547 & 0 & 0.183 \\ 0 & -0.619 & 0 & 0.527 & -0.321 \\ -0.138 & 0.321 & 0.183 & -0.321 & 0.394 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{Fi} := \sum_{k=1}^m \sum_{jj=1}^3 \int_0^{L_k} \frac{M_F(x)_{k,jj} \cdot (M1(x)_i)_{k,jj}}{E_{jj} \cdot J_{k,jj}} dx$$

$$\Delta_F = \begin{pmatrix} -23.377 \\ -3.667 \\ 26.585 \\ 2.292 \\ 10.084 \end{pmatrix}$$

Решение системы канонических уравнений метода сил

$$X := -\delta^{-1} \cdot (\Delta_F + \Delta_{L_t} - \Delta)$$

$$X = \begin{pmatrix} 60.142 \\ -0.332 \\ 3.195 \\ -16.428 \\ -19.205 \end{pmatrix}$$

Рис. 30П.5. Определение неизвестных реакций отброшенных связей

Там же приведено решение системы канонических уравнений в матричном виде

$$X = -\delta^{-1} \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta = \Delta_F + \Delta_t + \Delta_{\text{монт}}.$$

Для проверки правильности решения выбираем другую основную систему — убираем заделку слева. Но в заделке 6 связей, а отбросить надо только 5 связей, поэтому оставляем одну (любую) из этих связей (рис. 30П.6).

Проверка состоит в определении перемещений Δ отброшенных связей. По всем этим направлениям должно быть $\Delta = 0$.

В качестве усилий от внешних сил используем моменты для эквивалентной системы, представленные на рис. 30П.7 как сумма усилий от внешних сил и от уже найденных реакций отброшенных связей.

Чтобы определить усилия от единичной силы, надо вначале определить опорные реакции в новой единичной системе (рис. 30П.6). Они определяются с помощью вычислительного блока [given-find](#), в который поставлены 6 уравнений равновесия единичной системы. С учетом найденных реакций записаны усилия от единичной силы $M_A(x)$.

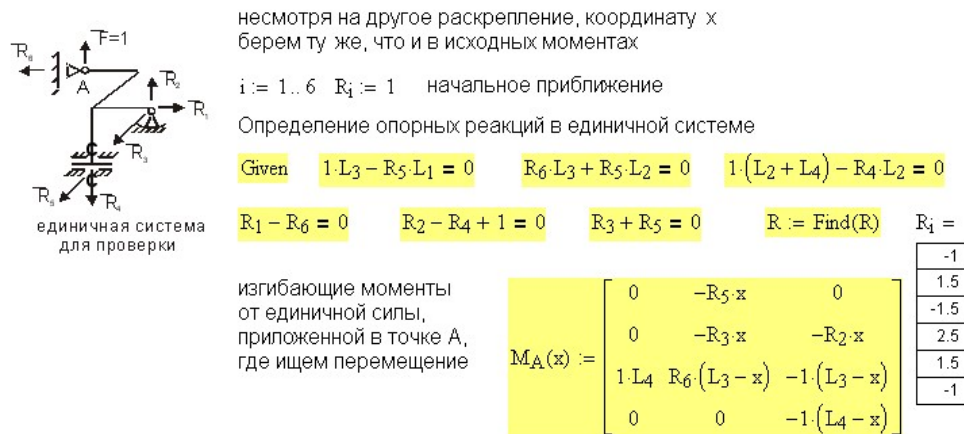


Рис. 30П.6. Определение опорных реакций при новом закреплении системы

$$M_{\text{зкв}}(x, k, j) := M_F(x)_{k,j} + \sum_{i=1}^n \left[X_i \cdot (M1(x)_i)_{k,j} \right] \quad j := 1..3$$

не идет в mathcad 11

Вместо $M_{\text{зкв}}$ в выражение для Δ_A подставляем его развернутое выражение

$$\Delta_A := \sum_{k=1}^m \sum_{jj=1}^3 \int_0^{L_k} \left[M_F(x)_{k,jj} + \sum_{i=1}^n \left[X_i \cdot (M1(x)_i)_{k,jj} \right] \cdot \frac{M_A(x)_{k,jj}}{E_{jj} \cdot J_{k,jj}} dx + \Delta L_{t_4} + \Delta_4 \right]$$

$\Delta_A = -0$

Рис. 30П.7. Проверка правильности решения задачи

Далее с помощью интеграла Мора определяется искомое перемещение Δ_A (рис. 30П.7).

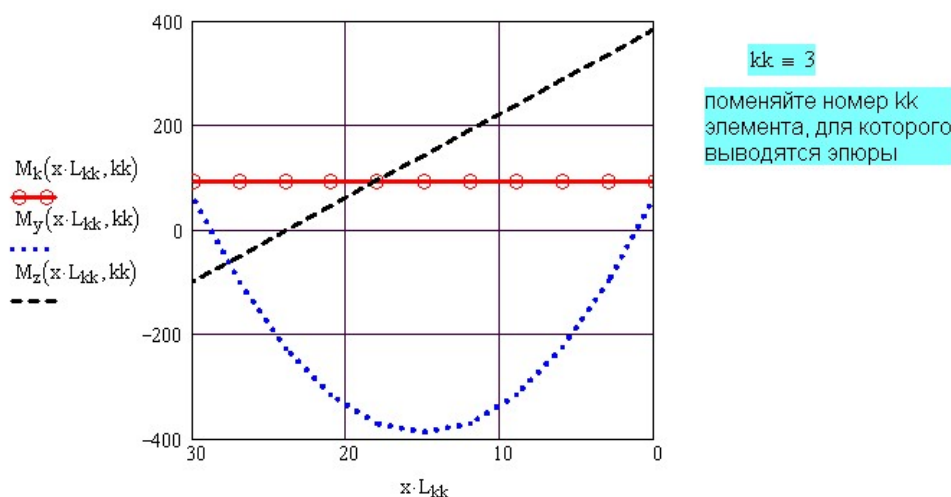
Как и в плоской задаче при проверке рекомендуется положить равными нулю перемещения от температуры и от монтажных неточностей. При правильно записанных моментах от сил проверка всегда дает $\Delta_A = 0$.

Для расчета рамы на прочность далее построены эпюры крутящих и изгибающих моментов в двух плоскостях (рис. 30П.8). Поменяйте номер участка и посмотрите вид эпюр внутренних усилий на различных участках.

Внутренние усилия в стержнях рамы

$$x := 0, 0.1..1 \quad M_k(x, kk) := M_{\text{зкв}}(x, kk, 1)$$

$$M_y(x, kk) := M_{\text{зкв}}(x, kk, 2) \quad M_z(x, kk) := M_{\text{зкв}}(x, kk, 3)$$

Рис.30П.8. Эпюры моментов для участка k

Далее для подстановки в условие прочности определяются расчетные моменты в соответствии с третьей гипотезой прочности $M_{\text{расч}} = \sqrt{M_k^2 + M_y^2 + M_z^2}$ (рис. 30П.9) строятся графики $M_{\text{расч}}(x)$ для всех 4-х участков.

$$M_{расч}(x, k) := \sqrt{M_k(x, k)^2 + M_y(x, k)^2 + M_z(x, k)^2}$$

Расчетные напряжения по длине всех 4-х участков

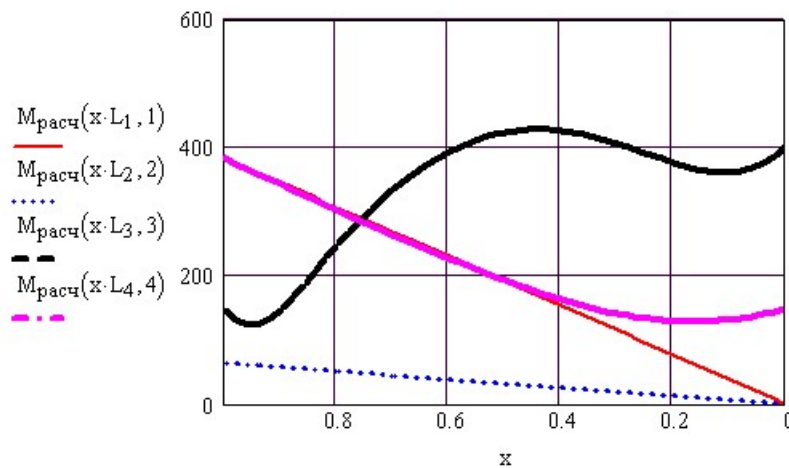


Рис. 30П.9. Изменение расчетных моментов по длине всех участков

С помощью функции **maximize** определяется максимальное значение $M_{расч}(x)$, которое подставляется в условие прочности (рис. 30П.10).

Ни одна встроенная функция Mathcad не может определить экстремум функции со скачками и разрывами. Если максимум напряжения определяется на каждом участке отдельно и разрыва функции там нет, то с такой задачей успешно справляется функция **Maximize**. Для определения $\max M_{расч}$ использована подпрограмма **maxM**, которая определяет максимальное напряжение на каждом участке и выбирает из них большее.

Определение максимального эквивалентного момента

$$k := 1 \quad x := L_k \cdot 0.5 \quad \text{Given} \quad 0 < x < L_k \quad x_{\max}(k) := \text{Maximize}(M_{расч}, x)$$

$$\begin{aligned} \text{maxM} &:= \begin{cases} \text{for } k \in 1..4 \\ x_k \leftarrow x_{\max}(k) \\ M_k \leftarrow M_{расч}(x_k, k) \\ M1 \leftarrow \max(M) \\ (M \quad M1)^T \end{cases} \\ \text{maxM}_1 &= \begin{pmatrix} 384.11 \\ 64.24 \\ 428.63 \\ 383.06 \end{pmatrix} \\ \text{maxM}_2 &= 429 \\ \text{maxM} &:= \text{maxM}_2 \end{aligned}$$

опасное сечение в конце 2-го участка

Подбор размеров сечений стержня из условия прочности

$$\sigma_{доп} := 1000 \quad \text{допускаемое напряжение}$$

$$D := 1 \quad D := \text{root}\left(\frac{\text{maxM}}{0.1 \cdot D^3} - \sigma_{доп}, D\right) \quad D = 1.624$$

Рис. 30П.10. Определение максимального расчетного момента и диаметра стержней

Из условия прочности с помощью функции **root** определяется диаметр стержней рамы.

Поменяйте исходные данные и посмотрите на результаты расчета

$\Delta t = 0$ градусов $F_1 = 20$ кг $F_2 = 30$ кг $q = 4$ $\frac{\text{кг}}{\text{см}}$ $M_0 = 100$ кгсм

длины участков $L = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$ монтажный зазор $\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ диаметр стержня $d = 1$ см допускаемое напряжение $\sigma_{\text{доп}} = 1000$ $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$

Результаты расчета

$\Delta_F = \begin{pmatrix} -23.377 \\ -3.667 \\ 26.585 \\ 2.292 \\ 10.084 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 60.142 \\ -0.332 \\ 3.195 \\ -16.428 \\ -19.205 \end{pmatrix}$ Проверка $\Delta_A = -0$

$x := 0, 0.05 \dots 1$ $k = 3$ поменяйте номер k элемента, для которого выводятся эпюры

$\max M_{\text{расч}} = 428.6$ кгсм $D = 1.624$ см

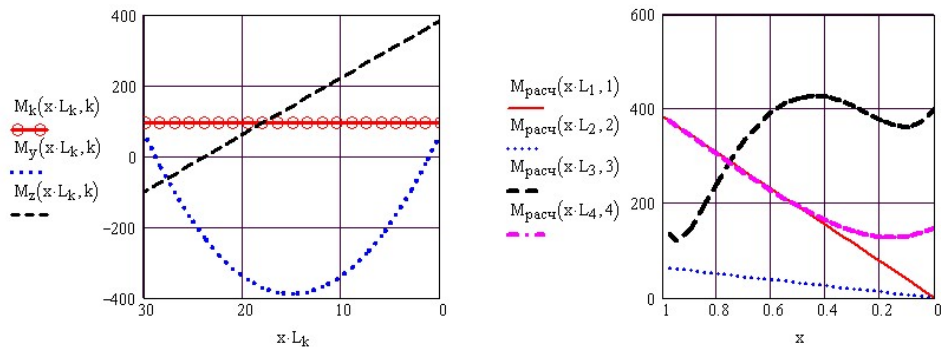


Рис. 11.45. Вывод результатов расчета. Исходные данные заданы глобально

Для удобства анализа результатов расчета рекомендуется исходные данные задать глобально в конце программы. Там же вывести результаты расчета. Меняя исходные данные, можно сразу наблюдать изменение результатов расчета (рис. 30П.11).

Пример 31. Расчет многопролетной балки с одной заделкой на изгиб.

(Программа 31-n-opor1.mcd)

Рассмотрим расчет многопролетной балки. Полагаем, что каждая опора накладывает только одну связь. Для расчета подобных балок используют уравнение трех моментов. Этот метод основан на использовании так называемых табличных балок, перемещения которых определяются по формулам, взятым из справочников.

В данном примере для расчета многопролетных балок используем метод сил. Без использования компьютера решить подобную задачу для много раз статически неопределимых балок невозможно. Mathcad позволяет сравнительно легко решить такую задачу. На рис. 31П.1 изображена условная схема нагружения многопролетной балки с заделкой с одного конца. Условность схемы состоит в том, что количество опор может быть любым, количество нагрузок и вид нагрузок также может быть любым.

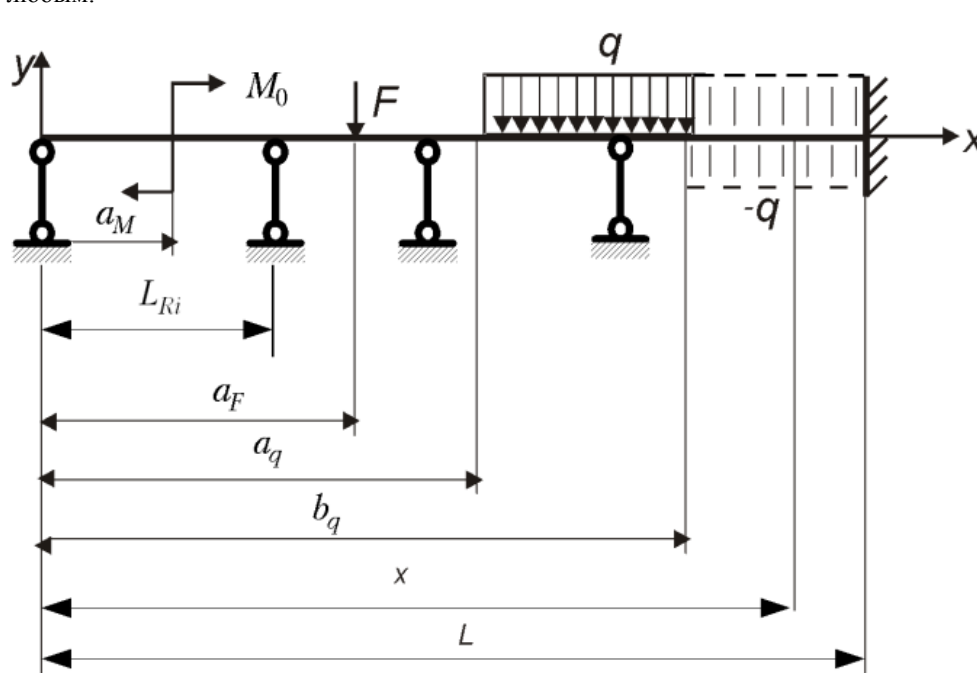


Рис. 31П.1. Условная схема нагружения многопролетной балки

Исходные данные к расчету многопролетной балки приведены на рис. 31П.2. Сечение балки ступенчатое, задано функцией $J(x)$. Закон изменения момента инерции сечения может быть любым. Если сечение постоянное по длине балки, то лучше записать момент инерции как константу, удалив параметры функции. В этом случае продолжительность расчета заметно уменьшится. Положение опор, как и их число, может быть любым.

Решение такой задачи методом сил несколько упрощается, так как не надо определять реакции для грузовой и единичных систем. В качестве основной статически определимой системы выбираем балку с заделкой, отбросив все шарнирные опоры. Нагрузив основную систему всеми внешними силами, получаем грузовую систему (рис. 31П.3, слева). Число единичных систем равно числу отброшенных опор. Каждая единичная система нагружается одной единичной силой, приложенной вместо отброшенной связи, (рис. 31П.3, справа).

Внутренние усилия в грузовой системе определяются также, как в примере 11 ([Определение внутренних усилий при изгибе консольной балки](#)). Эпюры поперечной силы и изгибающего момента показаны на рис. 31П.4.

Заданные нагрузки F , q , M и координаты точек их приложения

сосредоточенные силы

$$F := \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} \quad L_F := \begin{pmatrix} 1 \\ 6.5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

распределенные нагрузки

$$q := \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad L_{qH} := \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \text{м} \quad L_{qK} := \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

пары сил

$$M := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \text{кНм} \quad L_M := \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \text{м} \quad E := 10^5 \cdot \text{МПа} \quad \text{модуль Юнга}$$

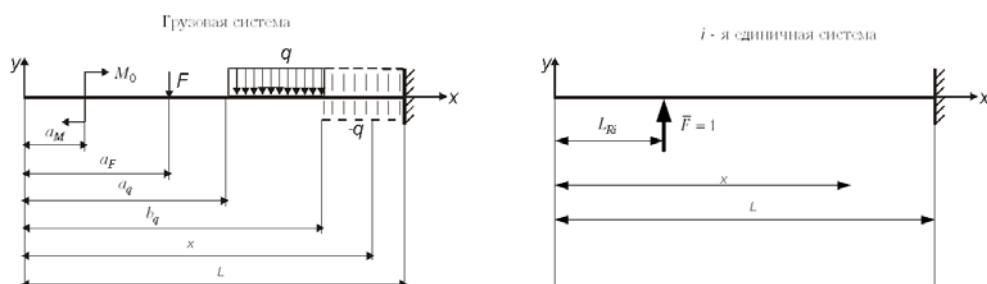
$$J(x) := \begin{cases} (100 \cdot \text{см}^4) & \text{if } 0 \leq x \leq 4 \cdot \text{м} \\ (500 \cdot \text{см}^4) & \text{if } 4 < x \leq 8 \cdot \text{м} \\ ((100 \cdot \text{см}^4)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

момент инерции
сечения балки

положение опор $L_R := (0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8)^T \cdot \text{м}$ $L := 10 \cdot \text{м}$ $x := 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} \dots L$

$m := \text{rows}(L_R)$

При расчете балки методом сил основная система - балка с заделкой справа

степень статической неопределимости $n := m$ $n = 5$ **Рис. 31П.2.** Исходные данные для расчета многопролетной балки**Рис. 31П.3.** Грузовая и одна из единичных систем для расчета многопролетной балки методом сил

$$R_A := \frac{-M_{ZZ}(L)}{L_{RB} - L_{RA}} \quad R_A = -28.4 \text{ кН}$$

Определение реакций
для грузовой системы

$$R_B := -Q_{Fq}(L) - R_A \quad R_B = 26.4 \text{ кН}$$

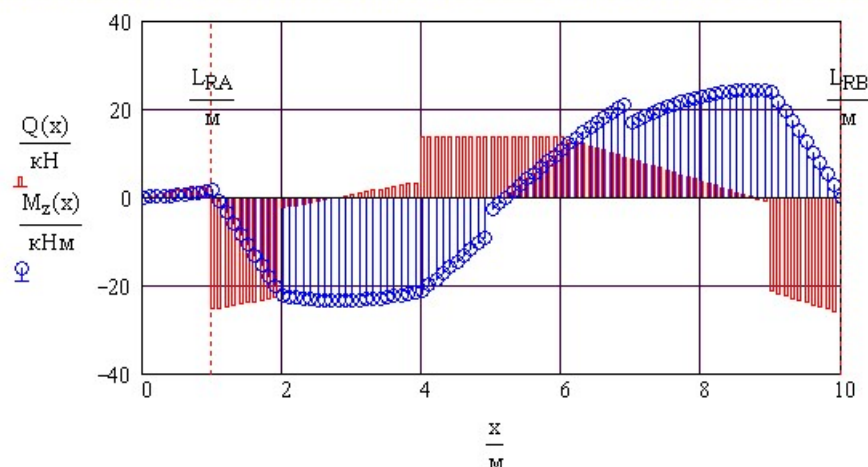
$$Q_{RA}(R_A, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA}) \quad Q_{RB}(R_B, x) := R_B \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$Q(x) := Q_{RA}(R_A, x) + Q_{RB}(R_B, x) + Q_F(x) + Q_q(x)$$

$$M_{zRA}(R_A, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA})$$

$$M_{zRB}(R_B, x) := R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$M_z(x) := M_{zRA}(R_A, x) + M_{zRB}(R_B, x) + M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$$

Эпюры изгибающего момента и поперечной силы для грузовой системы

Изгибающие моменты для всех единичных систем записаны в виде функции от координаты LL отброшенной опоры (рис. 31П.5). На этом же рисунке далее приведены выражения для расчета коэффициентов податливости, решение системы канонических уравнений метода сил путем обращения матрицы податливости. Эпюра изгибающих моментов для эквивалентной системы как результат решения задачи показана на рис. 31П.6.

Для проверки правильности решения задачи определяются перемещения $\Delta(LL)$ в местах отброшенных связей (рис. 31П.6). Здесь LL — вектор координат отброшенных связей. В результате вычисления огромного количества интегралов и решения системы уравнений набирается большая ошибка вычислений. Для ее уменьшения приходится увеличить точность расчетов. Для этого в главном меню Mathcad надо выбрать **Tools ▶ Worksheet options** в поле ввода TOL ввести величину 10^{-7} вместо используемой по умолчанию 10^{-3} .

На рис. 31П.7 показан вид упругой линии балки после деформации. Как видно из этого рисунка во всех точках, где отброшены связи, прогиб балки равен нулю, что свидетельствует о правильности решения задачи. В качестве напоминания справа от графика выведен вектор L_R — координаты точек, где отброшены связи. Работая с примером, поменяйте нагрузки на балку, число опор и их положение.

изгибающие моменты от внешних сил $M_F(x)$

изгибающие моменты $M1$ от единичных сил

LL - координата точки приложения единичной силы

$$M1(LL, x) := 1 \cdot (x - LL) \cdot (x > LL) \quad i := 1..n \quad j := 1..n$$

коэффициенты податливости

$$\delta_{i,j} := \int_0^L \frac{M1(L_{R_i}, x) \cdot M1(L_{R_j}, x)}{E \cdot J(x)} dx \quad \delta = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2.14 & 1.54 & 1.01 & 0.58 & 0.19 \\ 2 & 1.54 & 1.15 & 0.78 & 0.45 & 0.15 \\ 3 & 1.01 & 0.78 & 0.55 & 0.32 & 0.11 \\ 4 & 0.58 & 0.45 & 0.32 & 0.19 & 0.07 \\ 5 & & & & 11 & 0.07 & 0.03 \end{array} \frac{м}{кН}$$

$$\Delta_{F_i} := \int_0^L \frac{(M_F(x)) \cdot M1(L_{R_i}, x)}{E \cdot J(x)} dx \quad \Delta_F = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & -1.82 \cdot 10^1 \\ 2 & -1.37 \cdot 10^1 \\ 3 & -9.26 \cdot 10^0 \\ 4 & -5.28 \cdot 10^0 \\ 5 & -1.7 \cdot 10^0 \end{array} м$$

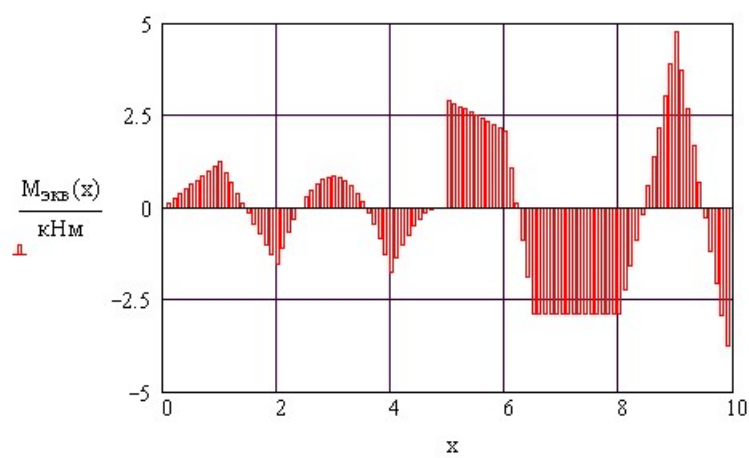
Решение системы канонических уравнений метода сил

$$X := -\delta^{-1} \cdot \Delta_F \quad X^T = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1.27 & 7.38 & 8.34 & -6.53 & -2.64 \end{array} кН$$

Изгибающие моменты для системы, эквивалентной заданной

$$M_{эКВ}(x) := M_F(x) + \sum_{i=1}^n X_i M1(L_{R_i}, x)$$

Рис. 31П.5. Расчет многопролетной балки с заделкой методом сил



перемещения для системы, эквивалентной заданной

Проверка (прогибы балки на опорах должны быть равны нулю)

$$\Delta(LL) := \int_0^L \frac{M_{ЭКВ}(x) \cdot M1(LL, x)}{E \cdot J(x)} dx \quad i := 1..m$$

| i = | $\Delta(LR_i) =$ | mm |
|-----|------------------|----|
| 1 | -0.048 | |
| 2 | -0.024 | |
| 3 | -0.043 | |
| 4 | -0.051 | |
| 5 | 0.002 | |

Эта ошибка мала, так как велика погрешность вычислений

Для уменьшения погрешности вычислений нужно уменьшить параметр **TOL=10⁻⁷** в меню **Tools \ Worksheet options \ Built-in-variables**

Рис. 31П.6. Проверка правильности решения задачи

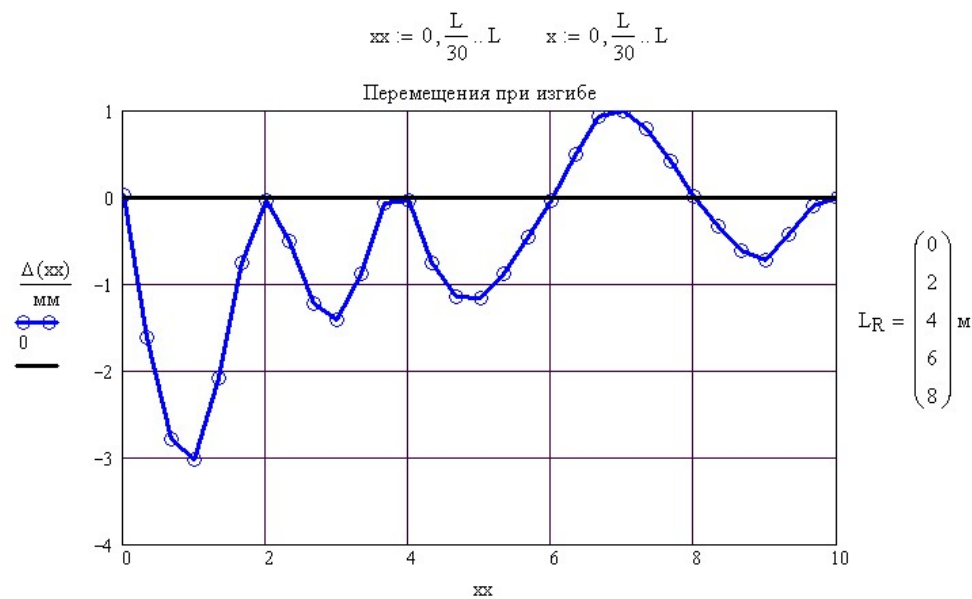


Рис. 31П.7. Упругая линия многопролетной балки

Пример 32. Расчет многопролетной балки на изгиб.

(Программа 32-n-opor2.mcd)

Если у многопролетной балки нет заделки на одном из ее концов, а есть только шарнирные опоры, то при работе в Mathcad расчет становится немного сложнее. Для грузовой и всех единичных систем потребуется определять опорные реакции. Условная схема расчета такой балки показана на рис. 32П.1. В качестве основной статически определимой системы возьмем балку на двух опорах. Оставляем крайние левую и правую опоры. Остальные отбрасываем и заменяем неизвестными реакциями X_i . Грузовая и одна из единичных систем показаны на рис. 32П.2. Исходные данные к расчету приведены на рис. 32П.3.

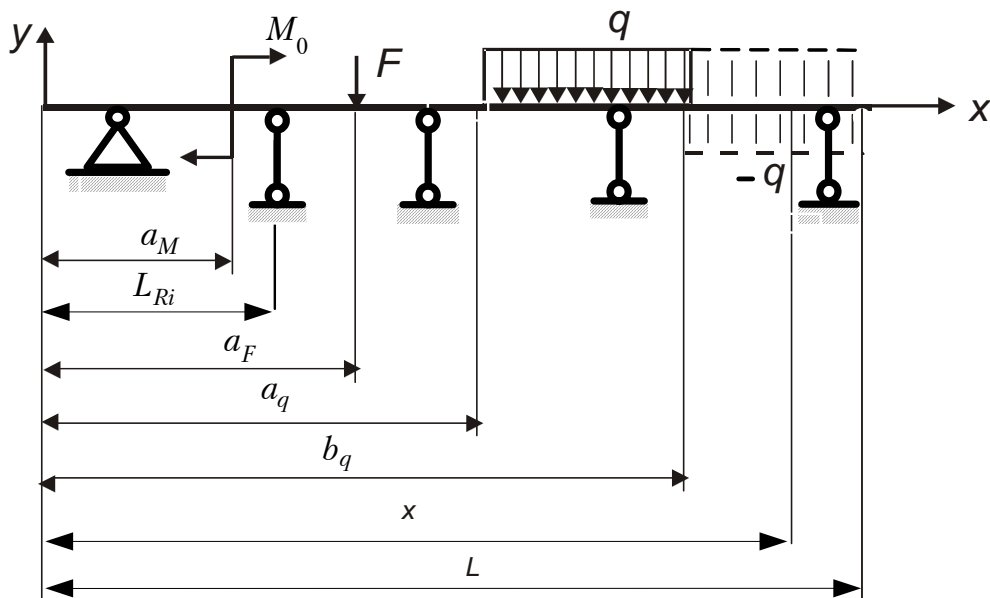


Рис. 32П.1. Условная схема нагружения многопролетной балки

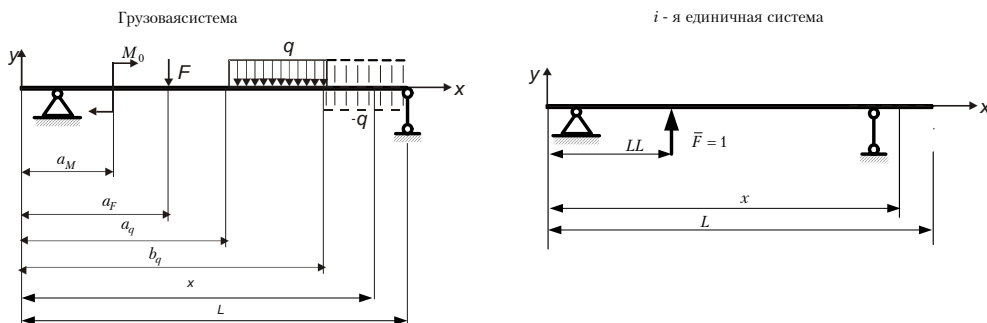


Рис. 32П.2. Расчетные схемы для многопролетной балки

Заданные нагрузки F, q, M и координаты точек их приложения

119

сосредоточенные силы

$$F := \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{кН}$$

распределенные нагрузки

$$L_F := \begin{pmatrix} 1 \\ 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

$$q := \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$L_{qH} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

$$L_{qK} := \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

пары сил

$$M := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \text{кНм}$$

$$L_M := \begin{pmatrix} 5 \\ 9.5 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

длина балки

$$L := 10 \cdot \text{м}$$

$$x := 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} \dots L$$

положение опор

$$L_R := (1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 10) \cdot \text{м}$$

$$E := 10^5 \cdot \text{МПа} \quad \text{модуль Юнга}$$

$$m := \text{rows}(L_R)$$

$$L_X := \text{submatrix}(L_R, 2, m-1, 1, 1)$$

При расчете балки методом сил основная система - балка на двух опорах (крайних)

$$L_{RA} := L_{R_1} \quad L_{RB} := L_{R_m}$$

координата отброшенных связей

$$L_X^T = (3 \ 5 \ 6 \ 8) \cdot \text{м}$$

степень статической неопределимости

$$n := m - 2 \quad n = 4$$

$$J(x) := \begin{cases} (100 \cdot \text{см}^4) & \text{if } 0 \leq x \leq 4 \cdot \text{м} \\ (500 \cdot \text{см}^4) & \text{if } 4 < x \leq 8 \cdot \text{м} \\ ((100 \cdot \text{см}^4)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

момент инерции сечения балки

Рис. 32П.3. Исходные данные к расчету многопролетной балки

В примере12 (Определение внутренних усилий в балке на двух опорах) опорные реакции определялись с помощью вычислительного блока Given-Find. При решении данной задачи этот блок вызывается тысячи раз и вычисление продолжается очень долго (больше 5 минут). Для ускорения процесса я решил вместо блока Given-Find вставить в программу формулы для определения реакций (рис. 32П.4). Реакции для грузовой системы вычисляются только один раз. Там же на рис. 32П.4 показана эпюра изгибающих моментов для грузовой системы. а реакции единичной системы многократно, поэтому их определение оформлено в виде подпрограммы (рис. 32П.5), в которую вставлены конкретные формулы, полученные при преобразовании уравнений равновесия балки Замена вычислительного блока Given-Find на приведенную подпрограмму привело к уменьшению времени расчета примерно в сто раз.

$$R_A := \frac{-M_{ZZ}(L)}{L_{RB} - L_{RA}}$$

$$R_A = -28.4 \text{ кН}$$

Определение реакций для грузовой системы

$$R_B := -Q_{Fq}(L) - R_A$$

$$R_B = 26.4 \text{ кН}$$

$$Q_{RA}(R_A, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA}) \quad Q_{RB}(R_B, x) := R_B \cdot (x \geq L_{RB})$$

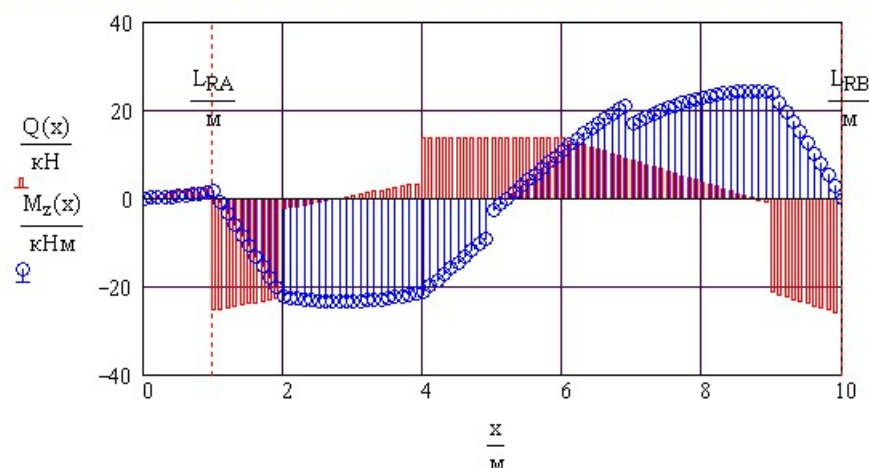
$$Q(x) := Q_{RA}(R_A, x) + Q_{RB}(R_B, x) + Q_F(x) + Q_q(x)$$

$$M_{ZRA}(R_A, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA})$$

$$M_{ZRB}(R_B, x) := R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})$$

$$M_Z(x) := M_{ZRA}(R_A, x) + M_{ZRB}(R_B, x) + M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$$

Эпюры изгибающего момента и поперечной силы для грузовой системы



изгибающие моменты от внешних сил $M_F(x) := M_Z(x)$

Изгибающие моменты для единичных систем

LL - координата точки приложения единичной силы

$$M1(R_A, R_B, LL, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB}) + 1 \cdot (x - LL) \cdot (x > LL)$$

$$M1(LL, x) := \begin{cases} R_A \leftarrow \frac{-L_{RB} + LL}{L_{RB} - L_{RA}} \\ R_B \leftarrow -1 - R_A \\ M1(R_A, R_B, LL, x) \end{cases}$$

коэффициенты податливости

$i := 1..n \quad j := 1..n$

$$\delta_{i,j} := \int_0^L \frac{M1(L_{X_i}, x) \cdot M1(L_{X_j}, x)}{E \cdot J(x)} dx$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|------|------|------|------|
| 1 | 0.07 | 0.1 | 0.09 | 0.05 |
| 2 | 0.1 | 0.15 | 0.15 | 0.09 |
| 3 | 0.09 | 0.15 | 0.15 | 0.1 |
| 4 | 0.05 | 0.09 | 0.1 | 0.07 |

$\frac{м}{кН}$

$$\Delta_F := \int_0^L \frac{(M_F(x)) \cdot M1(L_{X_1}, x)}{E \cdot J(x)} dx$$

| | 1 |
|---|-------|
| 1 | -0.41 |
| 2 | -0.8 |
| 3 | -0.97 |
| 4 | -0.85 |

м

Решение системы канонических уравнений методом сил

$$X := -\delta^{-1} \cdot \Delta_F$$

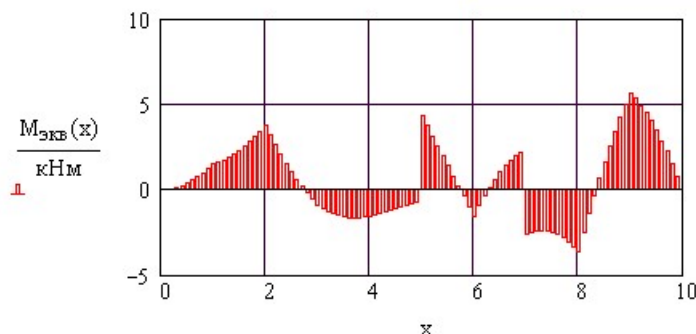
$$X^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1.08 & -16.8 & 12.39 & 15.37 \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{кН}$$

Рис. 32П.5. Расчет многопролетной балки методом сил

После определения внутренних усилий с учетом реакций последующие вычисления проводятся также как в примере 31 и приведены на рис. 32П.5 – 32П.7.

Изгибающие моменты для системы, эквивалентной заданной

$$M_{ЭКВ}(x) := M_F(x) + \sum_{i=1}^n X_i \cdot M1(L_{X_i}, x)$$



перемещения для системы, эквивалентной заданной

Проверка (прогибы балки на опорах должны быть равны нулю)

$$\Delta(LL) := \int_0^L \frac{M_{ЭКВ}(x) \cdot M1(LL, x)}{E \cdot J(x)} dx$$

$i := 1..m$

| i = | $\Delta(L_{R_i}) =$ | |
|-----|---------------------|----|
| 1 | 0 | мм |
| 2 | 0.016 | |
| 3 | 0 | |
| 4 | 0.003 | |
| 5 | 0.001 | |
| 6 | 0 | |

Эта ошибка мала, так как велика погрешность вычислений

Для уменьшения погрешности вычислений нужно уменьшить параметр **TOL=10⁻⁷** в меню **Tools \ Worksheet options \ Built-in-variables**

Рис. 32П.6. Результаты расчета многопролетной балки

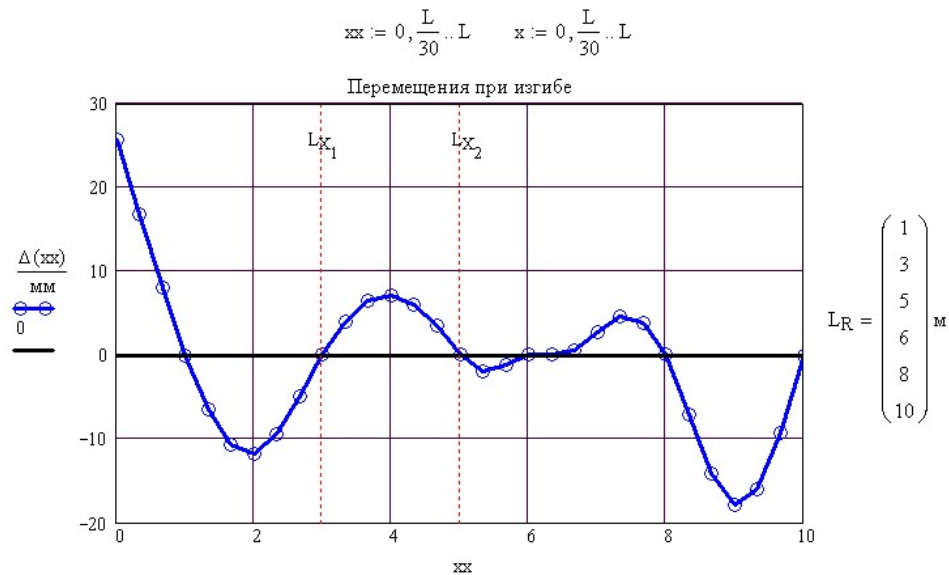


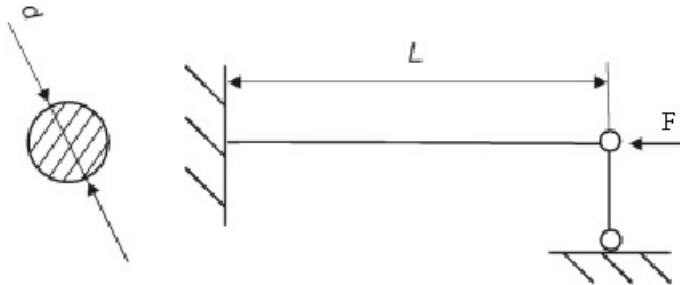
Рис. 32П.7. Проверка правильности расчета многопролетной балки

Пример 33. Подбор размеров сечения сжатого стержня.

(Программа 33-ustoi1.mcd)

Для стержня круглого поперечного сечения длиной $L = 2$ м, нагруженного силой $F = 80$ кН (рис. 33П.1), требуется определить диаметр стержня.

Расчетная схема стержня



Исходные данные

$F := 80 \cdot \text{кН}$ $\sigma_{\text{доп}} := 100 \cdot \text{МПа}$ $L := 2 \cdot \text{м}$ $\phi_1 := 0.6$

$\mu := 0.7$ коэффициент закрепления стержня,
поменяйте его

Рис. 33П.1. Схема нагружения стержня

Поскольку размеры сечения стержня неизвестны, а значит и гибкость стержня λ неизвестна, то расчет ведется итерационным методом.

Исходные данные для расчета стержня приведены на рис. 33П.1. На рис. 33П. 2 приведены справочные данные: зависимость коэффициента снижения допускаемого напряжения φ от гибкости стержня λ . Для автоматизации расчета введена функция интерполяции и построен график зависимости φ от λ (рис. 33П.2).

**Табличные значения коэффициента снижения
допускаемых напряжений ϕ от гибкости λ**

$\Phi := (1 \ 0.96 \ 0.92 \ 0.86 \ 0.75 \ 0.6 \ 0.45 \ 0.36 \ 0.29 \ 0.23 \ 0.19 \ 0.01)^T$

$\lambda := (0 \ 20 \ 40 \ 60 \ 80 \ 100 \ 120 \ 140 \ 160 \ 180 \ 200 \ 1000)^T$

$\phi(x) := \text{interp}(\text{cspline}(\lambda, \Phi), \lambda, \Phi, x)$ таблица коэффициентов
преобразована в функцию

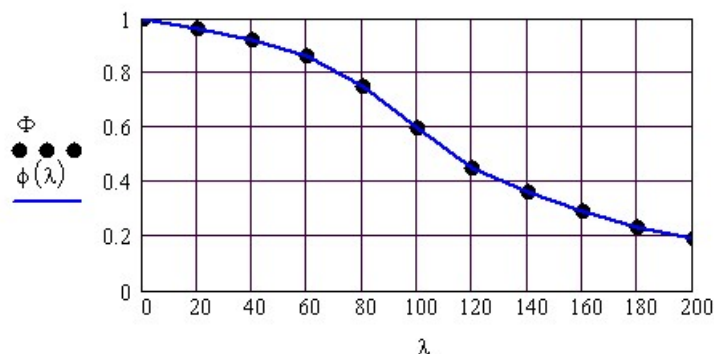


Рис. 33П.2. Зависимость коэффициента снижения допускаемого напряжения φ от гибкости стержня λ .

В справочниках приводятся значения коэффициента φ для $\lambda \leq 200$. На всякий случай, в массивы данных введено $\varphi = 0,01$ для $\lambda = 1000$, так как в ходе итерационного процесса могут появляться значения $\lambda > 200$. На графике это значение не показано.

Поскольку расчет выполняется многократно, он оформлен в виде программы (рис. 33П.3), состоящей из головной программы D , внутри которой многократно вызывается подпрограмма $d\lambda$ определения диаметра и гибкости стержня.


```

dλ(φ) :=
  σy ← φ · σдоп
  A ← F / σy
  d ← √(4 · A / π)
  J ← π · d4 / 64
  i ← √(J / A)
  λ ← μ · L / i
  λ ← 200 if λ > 200
  ( d
    λ · м )
  
```

Размерности в выходных массивах программ выравнены

```

D :=
  φ1 ← φ1
  φ2 ← 0
  j ← 0
  while |φ2 - φ1| / φ1 > 0.001
    φ2 ← (φ2 + φ1) / 2
    j ← j + 1
    d ← dλ(φ2)1
    λ ← dλ(φ2)2 / м
    φ1 ← φ(λ)
    φφj ← φ1
    ddj ← d
    λλj ← λ
  ( φφ  λλ  dd / м )T
  
```

Рис. 33П.3. Программа расчета диаметра сжатого стержня

В начале головной программы введены значения коэффициента φ : в начале φ_1 , в конце итерации φ_2 и счетчик числа итераций j . В нашем расчете для первой итерации взят совершенно неправдоподобный коэффициент $\varphi_1 = 0,9$, чтобы показать, что и в этом случае расчет сходится довольно быстро.

Затем следует итерационный цикл, начинающийся оператором **while** — повторять цикл до выполнения заданного критерия (пока расхождение между φ_1 и φ_2 не станет меньше 0,1%).

Вся программа выделена длинной вертикальной чертой слева, итерационный цикл выделен второй вертикальной чертой.

В подпрограмме $d\lambda$ последовательно вычисляются допускаемые напряжения на устойчивость σ_y , площадь сечения A , диаметр стержня d , момент инерции J , радиус инерции i и гибкость стержня λ .

В конце итерации определяется новое значение коэффициента φ с помощью функции интерполяции $\varphi(\lambda)$, показанной на рис. 33П.2.

Для начала следующей итерации вычисляется усредненное новое значение φ_1 . Далее следует возврат к началу цикла итерации, но перед этим организуется вывод результатов расчета каждой итерации.

Значения φ, λ, d на каждой итерации записываются в массивы $\varphi\varphi, \lambda\lambda, dd$.

Поскольку программа выводит численные значения последнего оператора, то в качестве последнего оператора поставлен составной массив: вектор, содержащий три вложенных массива и записанный в виде строки для экономии места в программе.

При отладке программ в составной массив можно включать результаты любых внутренних операторов программы.

результаты расчета на каждой итерации

Возврат к правильной размерности

| $\varphi := D_1$ | $\lambda := D_2$ | $d := D_3 \cdot \text{м}$ |
|--|--|---|
| $\varphi = \begin{pmatrix} 0.631 \\ 0.452 \\ 0.457 \\ 0.458 \end{pmatrix}$ | $\lambda = \begin{pmatrix} 96.106 \\ 119.721 \\ 118.828 \\ 118.74 \end{pmatrix}$ | $d = \begin{pmatrix} 58.269 \\ 46.775 \\ 47.127 \\ 47.162 \end{pmatrix} \text{ мм}$ |

Рис. 33П.4. Результаты расчета на каждой итерации

Результаты расчета показаны на рис.33П.4. Несмотря на высокую точность расчета (0,1%) четырех итераций оказалось достаточно для достижения указанной точности.

Пример 34. Определение критических нагрузок энергетическим методом.

(Программа 34-ustoi2.mcd)

Пример 1

Для схемы Эйлера (рис. 34П.1) определим критическую силу энергетическим методом.

схема Эйлера

ORIGIN := 1

Исходные данные

$$E := 2 \cdot 10^{11} \quad J := 5 \cdot 10^{-10} \quad L := 1$$

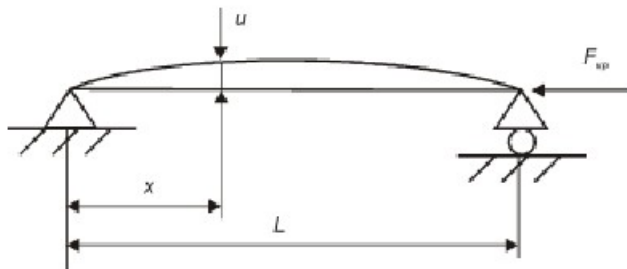


Рис. 34П.1. Результаты расчета на каждой итерации

В общем случае изогнутую ось стержня будем аппроксимировать полиномом степени m

$$u(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots = \sum_{i=0}^m C_i x^i.$$

Значения коэффициентов C_i определяем из граничных условий (условий закрепления стержня), решая систему уравнений с помощью вычислительного блока **given – find** (рис. 34П.2). Поскольку в программе нумерация коэффициентов начинается с 1 (**ORIGIN=1**), вид выражения полинома отличается от написанного выше.

имеем 4 граничных условия - берем полином 4-й степени

$$LL := \frac{L}{2} \quad u1(LL, C) = 0 \quad \text{ввиду симметрии системы это условие можно опустить}$$

$$m := 4 \quad i := 1..m+1$$

$$u(x, C) := \sum_{i=1}^{m+1} C_i x^{i-1} \quad u1(x, C) := \frac{d}{dx} u(x, C) \quad u2(x, C) := \frac{d^2}{dx^2} u(x, C)$$

$$C_1 := 1 \quad \text{Given} \quad u(0, C) = 0 \quad u(L, C) = 0 \quad u2(0, C) = 0 \quad u2(L, C) = 0$$

$$CC := \text{Find}(C) \quad \text{использован нелинейный метод} \quad x := 0, 0.1..L$$

решения системы уравнений

Рис. 34П.2. Определение коэффициентов аппроксимирующего полинома

Для стержня шарнирно закрепленного с двух концов граничными условиями являются равенство нулю прогиба на опорах $u(0) = 0$ и $u(L) = 0$, а также равенство нулю изгибающих моментов на концах стержня $M(0) = 0$ и $M(L) = 0$. Но изгибающий момент пропорционален второй производной от прогиба $M = EJ u''(x)$, следовательно, на концах стержня $u''(0) = 0$ и $u''(L) = 0$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Внутри блока **given – find** нельзя использовать в качестве условий производные. Граничные условия не могут вычисляться внутри блока **given – find**, поэтому каждой производной в программе присваивается имя функции, а в вычислительный блок записывается значение функции от заданного аргумента, например, для второй производной $u2(0, C) = 0$.

В рассмотренном примере используется полином четвертой степени, имеющий 5 неизвестных коэффициентов, следовательно, в вычислительный блок надо подставить 5 граничных условий. Однако в виду симметрии системы пятое условие (равенство нулю угла поворота сечения посередине балки) выполняется автоматически.

Кроме того, в формулу Рэлея входят лишь первая и вторая производные от прогиба, поэтому в расчете используются не 5, а 4 коэффициента. Кроме того, два коэффициента оказались равны нулю.

В общем, подбирая степень полинома, смотрите на его график. Главное, чтобы выполнялись граничные условия. Помните, что решение мы ищем приближенное, что подбираемый "на глазок" полином никак не учитывает различие в форме и размерах сечений по длине стержня.

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений требует использования нелинейных методов решения. Щелкните правой кнопкой мыши на имени функции **find** и в открывшемся контекстном меню выберите метод решения **Nonlinear**.

На рис. 34П.3 приведен вектор коэффициентов полинома и графики прогиба стержня и его первой и второй производных.

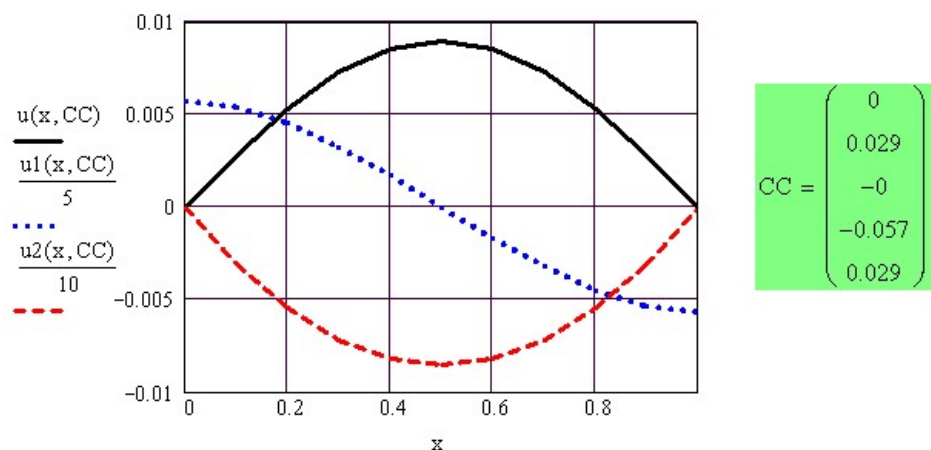


Рис. 34П.3. Графики аппроксимирующего полинома и его первой и второй производных

$$u(x, CC) := \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{L}\right)$$

Включите для проверки расчета

Формула Рэлея

$$F := \frac{\int_0^L E \cdot J \cdot \left(\frac{d^2 u(x, CC)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{d}{dx} u(x, CC) \right)^2 dx}$$

$F = 988.2 \text{ Н}$
 $F = 9.882 \frac{E \cdot J}{L^3}$

Рис. 34П.4. Формула Рэлея определения критической силы

На рис. 34П.4 записана формула Рэлея и приведено расчетное значение $P_{кр}$.

Выведено численное значение критической силы для заданного стержня и числовой коэффициент при буквенном выражении.

На том же рисунке предлагается проверить другой вид аппроксимации уравнения изогнутой оси стержня. При выводе формулы Эйлера использовалась синусоида для описания изогнутой оси. Включите выражение синусоиды и убедитесь, что результаты расчета совпадают для обоих видов аппроксимации изогнутой оси стержня.

Пример 2

Определить нагрузку, соответствующую потере устойчивости для ступенчатого стального стержня с двумя заделками и промежуточной шарнирной опорой, нагруженного двумя силами (рис. 34П.5).

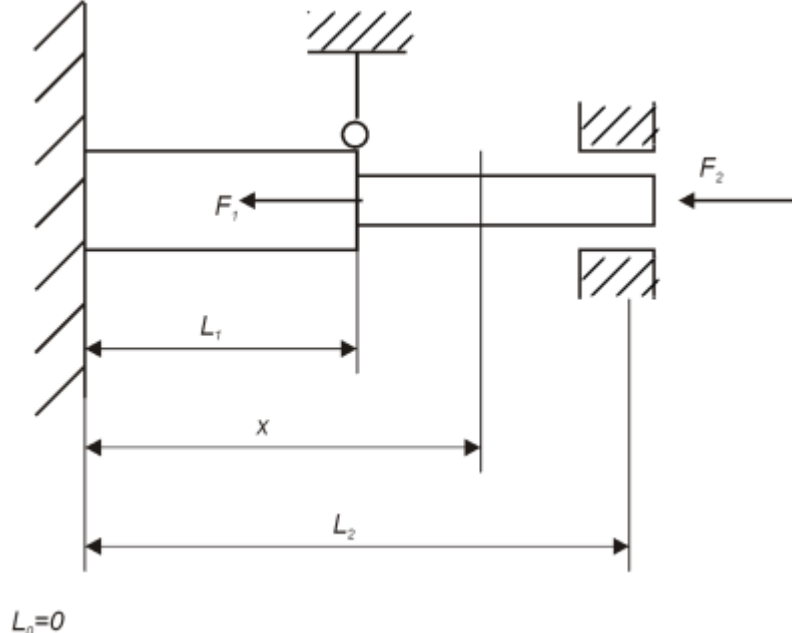


Рис. 34П.5. Схема нагружения ступенчатого стального стержня

Нижняя заделка неподвижная, верхняя подвижная. Промежуточная шарнирная опора установлена на границе нижней (толстой) части стержня и верхней (тонкой). Поскольку ищем нагрузку, то задано лишь соотношение сил на свободном конце и на границе участков $F_1 = 2F_2$. Исходные данные для расчета приведены на рис. 34П.6.

длина всего стержня $LL := 1$ границы участков $L := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ LL \end{pmatrix}$

соотношение сил $F := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

диаметры участков стержня и их момент инерции (первый участок - толстый, второй - тонкий)

$d := \begin{pmatrix} 0.015 \\ 0.01 \end{pmatrix}$ $JJ := \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ $JJ = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^{-9} \\ 4.9 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$ $J(x) := \begin{cases} JJ_1 & \text{if } x < L_2 \\ JJ_2 & \text{otherwise} \end{cases}$

Рис. 34П.6. Исходные данные для расчета на устойчивость ступенчатого стержня

Граничными условиями для изогнутой оси стержня являются равенство нулю прогибов в заделках и шарнирной опоре и равенство нулю углов поворота в заделках. Имеем 5 граничных условий. Ищем полином 5-й степени (рис.34П.7). Графики полинома и его первой и второй производных показаны на рис. 34П.8. Критические значения сил F_1 и F_2 приведены на рис. 34П.9.

имеем 5 граничных условий - берем полином 5-й степени

$m := 5$ $i := 1..m+1$ $u(x, C) := \sum_{i=1}^{m+1} C_i x^{i-1}$

$u1(x, C) := \frac{d}{dx} u(x, C)$ $C_1 := 1$ $u2(x, C) := \frac{d^2}{dx^2} u(x, C)$

прогиб на границах участков и угол поворота сечения в заделках равны нулю

Given $u(L_1, C) = 0$ $u(L_2, C) = 0$ $u(L_3, C) = 0$ $u1(L_1, C) = 0$ $u1(L_3, C) = 0$

$CC := \text{Find}(C)$ использован метод Левенберга $x := 0, 0.1..LL$

Рис. 34П.7. Подбор коэффициентов аппроксимирующего полинома

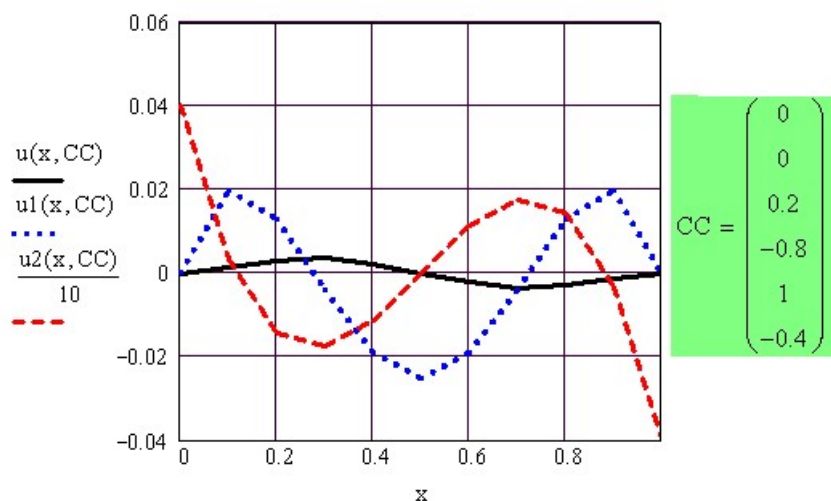


Рис. 34П.8. Графики аппроксимирующего полинома и его производных

$$F_{кр} := \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \int_{L_i}^{L_{i+1}} E \cdot J(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x, CC)}{dx^2} \right)^2 dx}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i}{F_1} \cdot \int_0^{L_{i+1}} \left(\frac{d u(x, CC)}{dx} \right)^2 dx}$$

n := 3

F_{кр} = 10713 Н

F1 := F_{кр} F1 = 10713 Н

F2 := F2 · F_{кр} F2 = 21427 Н

Рис. 34П.9. Определение критических нагрузок на ступенчатый стержень

Приведенная программа позволяет приближенно определять критическую нагрузку при действии нескольких сил и нескольких участках различной формы сечения. Степень полинома определяем, исходя из числа граничных условий и "на глазок" по виду графика полинома и его производных.

Пример 35. Продольно-поперечный изгиб.

128

(Программа 35-ustoi3.mcd)

Рассмотрим стальной стержень прямоугольного поперечного сечения, закрепленный на двух шарнирных опорах (схема Эйлера). Стержень нагружен осевой сжимающей и поперечной изгибающей нагрузками.

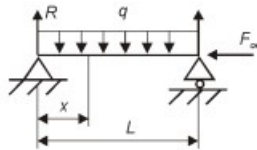
Рассчитаем прогиб стержня при двух видах поперечной нагрузки:

- ☐ равномерно распределенной по длине стержня,
- ☐ сосредоточенной.

Расчеты ведем без учета размерностей, так как функция решения дифференциальных уравнений `odesolve` не может работать с размерными величинами.

Схема нагружения и исходные данные для расчета стержня с поперечной распределенной нагрузкой показаны на рис. 35П.1.

распределенная нагрузка



исходные данные

$$\begin{aligned} L &:= 1 & b &:= 0.06 & h &:= 0.02 \\ E &:= 2 \cdot 10^{11} & F_{сж} &:= 12000 & q &:= 800 \end{aligned}$$

изгибающий момент

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad M(x) := q \cdot \frac{L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

Критическая сила по Эйлеру $\frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2} = 78957$

Рис. 35П.1. Схема нагружения и исходные данные для расчета

Расчет прогиба, поперечной силы и изгибающего момента показан на рис. 35П.2.

Для справки там же приведено значение критической силы, вычисленной по формуле Эйлера. Сжимающая сила взята $F \approx 0,8F_{кр}$.

На рис. 35П.3 приведены графики изменения по длине стержня прогиба, поперечной силы и изгибающего момента. Там же приведен расчет максимального напряжения в стержне.

решение уравнения упругой линии

Given $u''(x) \cdot E \cdot J + F_{сж} \cdot u(x) = -M(x)$

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0$$

$$x := 0, \frac{L}{50} .. L$$

перемещение

изгибающий момент

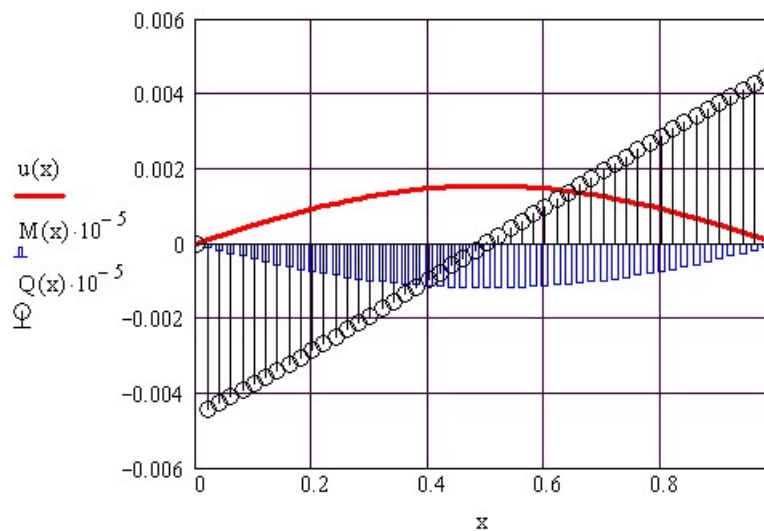
поперечная сила

$$u := \text{Odesolve}(x, L, 200)$$

$$M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x)$$

$$Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)$$

Рис. 35П.2. Расчет прогиба, поперечной силы и изгибающего момента



Определение максимального прогиба стержня

$xx := 0.2$ $x_{\max} := \text{Maximize}(u, xx)$

$$x_{\max} = 0.5 \quad u(x_{\max}) = 0.002 \quad M(x_{\max}) = -118$$

К сожалению нельзя в программе построить графики зависимости прогиба и напряжения от величины сжимающей силы. Функция **odesolve** не работает при переменных параметрах

$$W := \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\sigma_{\max} := \frac{|M(x_{\max})|}{W}$$

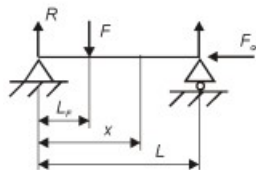
$$\sigma_{\max} = 30 \times 10^6$$

Рис.35П.3. Результаты расчета стержня с поперечной распределенной нагрузкой

Для определения максимального изгибающего момента использована функция **maximize**, хотя делать это не обязательно. По симметрии максимум находится посередине стержня при $x = 0,5$ м. Использование функции **maximize** позволяет использовать программу при различных поперечных нагрузках.

Расчет того же стержня при другой нагрузке показан на рис. 35П.4. Вместо распределенной нагрузки приложена сосредоточенная сила F . Результаты расчета приведены на рис. 35П.5.

сосредоточенная сила



поменяйте исходные данные

$$F_{\text{сж}} := 12000 \quad F_{\text{попер}} := 800 \quad L_F := 0.5$$

$$M(x) := \frac{F_{\text{попер}}}{2} \cdot x - F_{\text{попер}} \cdot (x - L_F) \cdot (x > L_F)$$

Given $u''(x) \cdot E \cdot J + F_{\text{сж}} \cdot u(x) = -M(x)$

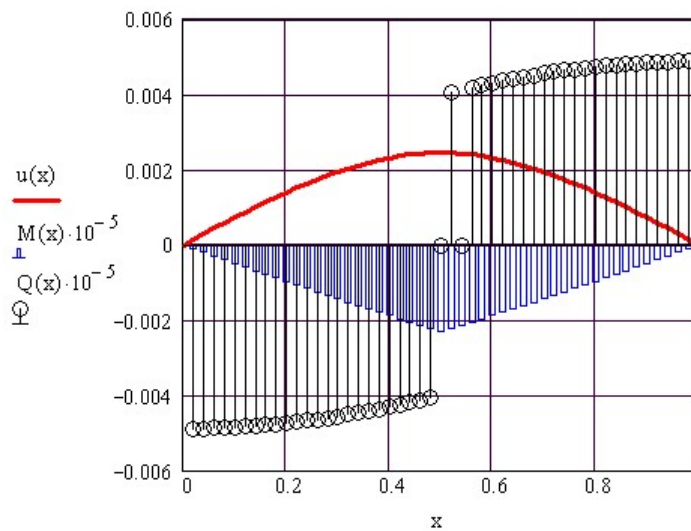
$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0$$

$$u := \text{Odesolve}(x, L, 200)$$

$$M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x)$$

$$Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x) \quad x := 0, \frac{L}{50} \dots L$$

Рис. 35П.4. Расчет стержня с поперечной силой.



Не работает в
версиях ниже
Mathcad 11

$$\begin{aligned}
 &xx := 0.2 \quad \text{Given} \quad M(xx) = -1000 \\
 &x_{\max} := \text{Minerr}(xx) \quad x_{\max} = 0.5 \quad u(x_{\max}) = 0.002 \quad M(x_{\max}) = -229 \\
 &W := \frac{b \cdot h^2}{6} \quad \sigma_{\max} := \frac{|M(x_{\max})|}{W} \quad \sigma_{\max} = 57.4 \times 10^6
 \end{aligned}$$

Рис.35П.5. Результаты расчета стержня с поперечной силой

К сожалению нельзя в программе построить графики зависимости прогиба и напряжения от величины сжимающей силы. Функция `odesolve` не работает при переменных параметрах.

распределенная нагрузка

$$\begin{aligned}
 &L := 1 \quad b := 0.06 \quad h := 0.02 \quad J := \frac{b \cdot h^3}{12} \\
 &E := 2 \cdot 10^{11} \quad q(x) := 800 \quad F_{сж} := 12000 \\
 &\text{Given} \quad u''''(x) + \frac{F_{сж}}{E \cdot J} \cdot u''(x) = \frac{q(x)}{E \cdot J} \quad x := 0, \frac{L}{50} \dots L \\
 &u(0) = 0 \quad u''(0) = 0 \quad u(1) = 0 \quad u''(1) = 0 \\
 &u := \text{Odesolve}(x, L, 1000) \\
 &M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x) \quad Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)
 \end{aligned}$$

Рис. 35П.6. Использование дифференциального уравнения 4-го порядка при продольно-поперечном изгибе стержня с поперечной распределенной нагрузкой

$$\text{сосредоточенная сила} \quad F_{\text{попер}} := 800 \quad F_{сж} := 12000 \quad L_F := 0.5$$

представим силу как нагрузку распределенную на длине Δ

$$\begin{aligned}
 &\Delta := \frac{L}{100} \quad qq := F_{\text{попер}} \cdot \frac{1}{\Delta} \quad q(x) := \begin{cases} qq & \text{if } L_F - \frac{\Delta}{2} \leq x \leq L_F + \frac{\Delta}{2} \\ qq \cdot 0.001 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &x := 0, \frac{L}{50} \dots L \\
 &\text{Given} \quad u''''(x) + \frac{F_{сж}}{E \cdot J} \cdot u''(x) = \frac{q(x)}{E \cdot J} \\
 &u(0) = 0 \quad u''(0) = 0 \quad u(1) = 0 \quad u''(1) = 0 \\
 &u := \text{Odesolve}(x, L, 200) \quad M(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x) \quad Q(x) := E \cdot J \cdot \frac{d^3}{dx^3} u(x)
 \end{aligned}$$

Рис. 35П.7. Использование дифференциального уравнения 4-го порядка при продольно-поперечном изгибе стержня с поперечной сосредоточенной силой

Для расчета стержня на продольно-поперечный изгиб, кроме дифференциального уравнения второго порядка, можно использовать дифференциальные уравнения четвертого порядка. Такой расчет показан на рис. 35П.6 для поперечной распределенной нагрузки и на рис. 35П.7 для поперечной сосредоточенной силы. Результаты расчета такие же, как при использовании дифференциального уравнения второго порядка и на рисунках здесь не приведены. Зато они включены в программу [ustoi3](#) в электронной книге.

Поскольку в дифференциальное уравнение входит только интенсивность поперечной распределенной нагрузки q , сосредоточенную силу надо заменить нагрузкой, распределенной на малой длине стержня Δ .

Величина Δ может быть сколь угодно малой. На остальной части стержня приходится приложить очень маленькую распределенную нагрузку. В противном случае Mathcad отказывается решать задачу.

Поскольку дифференциальное уравнение — четвертого порядка, внутри вычислительного блока [given](#) – [odesolve](#) записаны 4 граничных условия: равенство нулю прогиба стержня и равенство нулю изгибающих моментов (вторых производных от прогиба) в точках закрепления.

Решая дифференциальное уравнение четвертого порядка, не забывайте, что даже для Mathcad это чрезвычайно сложная задача. Результат вычислений (или отсутствие результата) зависит от выбора начального приближения, способа решения, числа шагов вычислений.

Пример 36. Динамический расчет консольной балки.

(Программа 36-koleb1.mcd)

Для консольной балки массой m_0 определить:

- ❑ максимальные динамические напряжения при падении на балку груза массой m в точку с координатой x_m ,
- ❑ собственную частоту колебаний с учетом массы балки и сосредоточенной массы в точке x_m ,
- ❑ Перемещение точки x_m балки под действием возмущающей силы $F(t)$, приложенной к этой точке.

В приведенном далее расчете использована консольная балка длиной L (рис. 36П.1). Груз падает в точку $x_m = 0$ на свободном конце консоли. Работая с программой, поменяйте положение точки соударения. Сечение — прямоугольное. Форму сечения можно задать любую. Балка стальная. Для нее заданы: модуль Юнга E и плотность ρ . Расчет ведется с учетом размерностей.

Исходные данные для расчета показаны на рис. 36П.2.

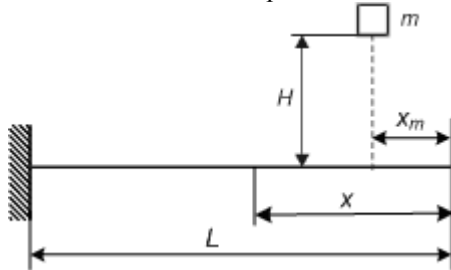


Рис. 36П.1. Расчетная схема балки

Исходные данные

для балки

$$L := 100 \cdot \text{см} \quad b := 10 \cdot \text{см} \quad h := 1 \cdot \text{см} \quad J := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$$

$$\rho := 7800 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad m_0 := \rho \cdot b \cdot h \cdot L \quad m_0 = 7.8 \text{ кг} \quad \text{плотность материала и масса балки}$$

$$m := 2 \cdot \text{кг} \quad \text{масса груза, падающего в точку} \quad x_m := 0.0 \cdot L \quad \text{с высоты} \quad H := 0.2 \cdot \text{м}$$

$$g := 9.81 \cdot \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} \quad F := m \cdot g \quad \text{вес груза} \quad \text{поменяйте } x_m \text{ и } H$$

Рис. 36П.2. Исходные данные для динамического расчета балки

Определение коэффициента приведения массы

Для динамического расчета балки как системы с одной степенью свободы определяется коэффициент приведения массы $k_{пр}$ в точку соударения x_m . Расчет

ведется по формуле
$$k_{пр} = \frac{1}{m_0} \int \left(\frac{\Delta(x)}{\Delta} \right)^2 dm,$$

Где $\Delta(x)$ — перемещение произвольной точки балки, Δ — перемещение точки приведения массы.

Перемещения в этой формуле определяются с помощью интеграла Мора. Грузовое и единичное состояния балки для определения перемещения в произвольном сечении показаны на рис. 36П. 3. Координата x точки приложения единичной силы изменяется по длине балки.

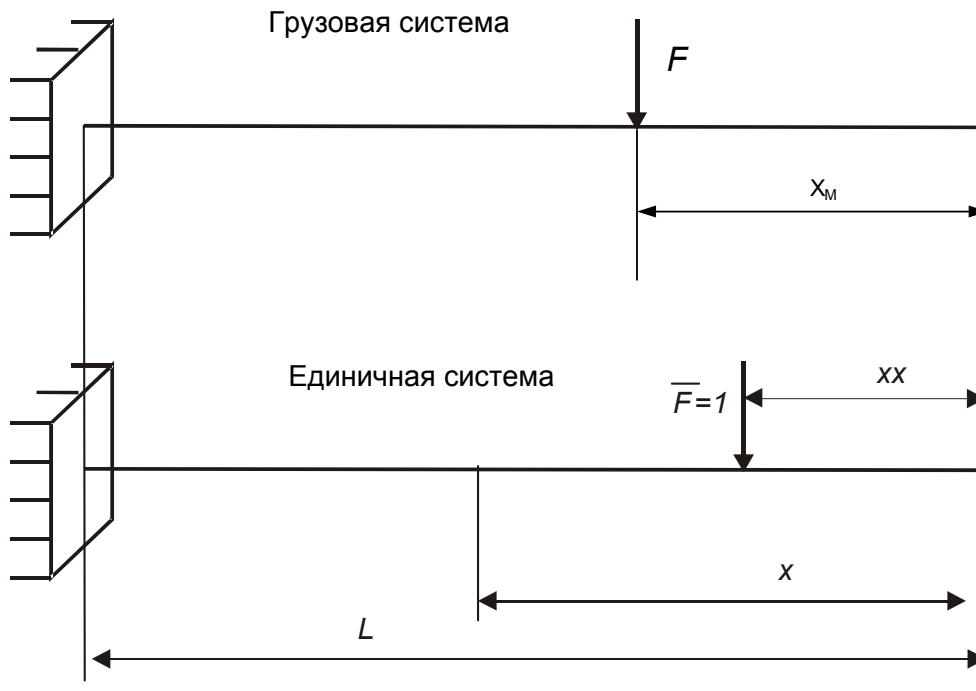


Рис.36П.3. Грузовое и единичное состояния балки при определении ее перемещений

Изгибающие моменты для грузового M и единичного $M1$ состояний балки (рис. 36П.4) записаны с использованием булевых операторов условия.

Для $M1$ в список параметров включена координата точки приложения единичной силы xx . Определение коэффициента приведения массы $k_{пр}$ показано на рис. 36П.4.

Следует отметить, что вычисление коэффициента приведения массы вручную является чрезвычайно трудоемкой задачей.

$$M(x) := F \cdot (x - x_m) \cdot (x > x_m) \quad M1(xx, x) := 1 \cdot (x - xx) \cdot (x > xx)$$

перемещение точки соударения от веса падающего груза

$$\Delta := \int_0^L \frac{M(x) \cdot M1(x_m, x)}{E \cdot J} dx \quad \Delta_x(xx) := \int_0^L \frac{M(x) \cdot M1(xx, x)}{E \cdot J} dx$$

$$k_{пр} := \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\Delta_x(xx)}{\Delta} \right)^2 dxx$$

коэффициент приведения массы $\Delta = 3.92 \text{ мм}$
 $k_{пр} = 0.236$

Рис. 36П.4. Определение коэффициента приведения массы

Расчет на удар

При ударе динамические напряжения прямо пропорциональны статическим напряжениям $\sigma_{\max, д} = \sigma_{\max, стат} \cdot k_d$. Расчет таких напряжений приведен на рис. 36П.5.

Для заданной высоты падения груза H определяется коэффициент динамичности k_d при вертикальном ударе. Максимальные напряжения при статическом приложении веса груза $F = mg$ действуют в заделке, поэтому нет нужды строить эпюру изгибающего момента. Далее определяются максимальные статические и динамические напряжения.

$$k_d := 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{H}{\Delta} \cdot \frac{1}{1 + k_{пр} \cdot \frac{m_0}{m}}}$$

коэффициент динамичности $k_d = 8.356$

$$\max M := M(L) \quad \max M = 19.62 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

максимальное статическое напряжение в заделке

$$W := b \cdot \frac{h^2}{6} \quad \sigma := \frac{\max M}{W} \quad \sigma = 11.772 \text{ МПа}$$

максимальное динамическое напряжение

$$\sigma_d := k_d \cdot \sigma \quad \sigma_d = 98 \text{ МПа}$$

Рис. 36П.5. Расчет максимальных динамических напряжений при ударе

Собственную частоту колебаний балки с распределенной массой m_0 и с сосредоточенной массой m , приложенной в сечении x_m определим по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + k_{\text{пр}} m_0}}, \text{ где жесткость } k \text{ балки — величина, обратная перемещению точки}$$

$$\text{приложения сосредоточенной массы от единичной силы } \delta_{11} = \sum \int_L \frac{\bar{M}^2 dS}{EJ}.$$

Момент от единичной силы уже определен в начале программы (рис. 36П.4). Определение собственной частоты ω показано на рис. 36П.6.

$$\delta_{11} := \int_0^L \frac{M1(x_m, x)^2}{E \cdot J} dx \quad k := \frac{1}{\delta_{11}} \text{ жесткость балки}$$

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m + k_{\text{пр}} \cdot m_0}} \quad f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad T := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

| | | |
|------------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| круговая частота в радианах | частота колебаний в герц | период колебаний в сек |
| $\omega = 36.093 \text{ сек}^{-1}$ | $f = 5.74 \text{ Гц}$ | $T = 0.174 \text{ сек}$ |

Рис. 36П.6. Определение собственной частоты колебаний балки

Там же по значению круговой частоты ω определены частота колебаний в секунду f и период колебаний T .

Вынужденные колебания балки

Следующая часть общей программы расчет вынужденных колебаний балки под действием возмущающей силы. Для такого расчета надо определить опытное значение коэффициента затухания h . Его определяют, обрабатывая экспериментальную диаграмму затухающих колебаний. В нашем примере задаемся коэффициентом затухания h , вернее, отношением $h/\omega = 0,02$.

Обратите внимание, что отношение h/ω в программе записано как h_ω (рис. 36П.8), так как объект присвоения в левой части выражения не может быть вычисляемым выражением, а дробь h/ω — это выражение.

Используя общее решение

$$u = A e^{-ht} \sin(\lambda t + \varepsilon) \text{ уравнения колебательного движения}$$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + 2hm \frac{du}{dt} + ku = F(t),$$

просто для иллюстрации процесса, строим диаграмму затухающих колебаний (рис. 36П.7). в электронной книге этот расчет спрятан в закрытой зоне. На рисунке видны зеленые границы этой зоны.

Как видно из этого рисунка за первую секунду (при частоте колебаний 15 гц) амплитуда колебаний уменьшилась в 5 раз. А через 2 – 3 секунды колебания практически прекратятся.

Свободные затухающие колебания

$$u_0 := 1 \cdot \text{см} \quad v_0 := 0 \cdot \frac{\text{м}}{\text{сек}} \quad A := \sqrt{u_0^2 + \frac{(v_0 + H \cdot u_0)^2}{\omega^2}} \quad A = 0.01 \text{ м}$$

$$\varepsilon := 0 \quad u1(t) := A \cdot e^{-H \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varepsilon) \quad t := 0, 0.02 \cdot \text{сек}.. 4 \text{ сек}$$

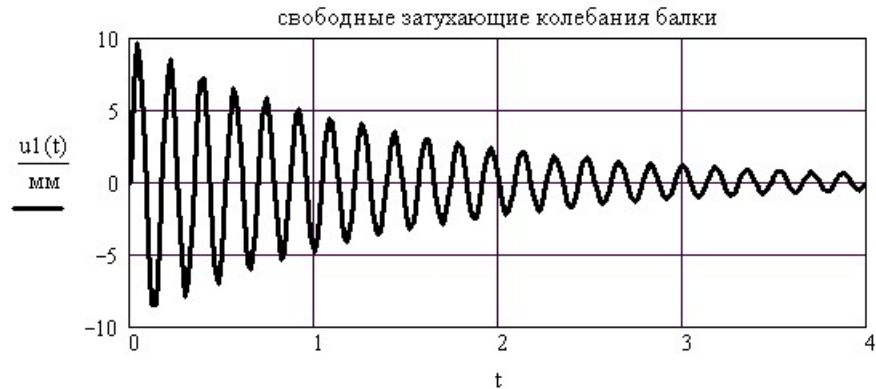


Рис. 36П.7. Свободные затухающие колебания балки

Для определения отклика балки на возмущающее действие силы использован интеграл Дюамеля $u(F, t)$

$$u = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t F_\tau e^{-h(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) \cdot d\tau.$$

представляющий собой перемещение точки приведения масс в направлении колебания от действия возмущающей силы $F(t)$.

Меняя в интеграле Дюамеля выражение для возмущающей силы, строим графики перемещений для различных видов возмущающей силы. На рис. 36П.8 показано действие на балку гармонически действующей силы $F(t) = F_0 \sin(\nu t)$. Здесь ν — частота действия возмущающей силы $F(t)$.

В примере рассмотрен момент резонанса $\nu = \omega$. Поменяйте частоту ν и убедитесь, что амплитуда колебаний резко уменьшится.

$h_{\omega} := 0.02$ относительный коэффициент затухания колебаний h/ω $H := h_{\omega} \cdot \omega$ $H = 0.722 \text{ сек}^{-1}$

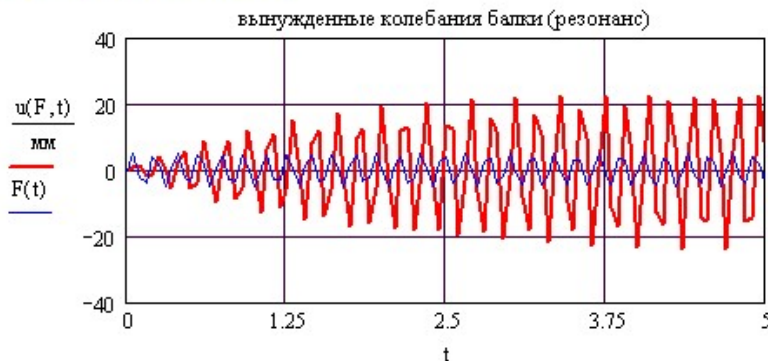
Интеграл Дюамеля для вынужденных затухающих колебаний

$$mm := m + k_{\text{ДП}} \cdot m_0 \quad u(F, t) := \frac{1}{mm \cdot \omega} \int_0^t F(\tau) \cdot e^{-H \cdot (t-\tau)} \cdot \sin[\omega \cdot (t - \tau)] d\tau$$

Гармоническая синусоидальная нагрузка

Изменение нагрузки во времени $v := \omega$ резонанс $v := 0.8 \cdot \omega$ Включите выражение $t := 0, 0.05 \cdot \text{сек}.. 5 \cdot \text{сек}$

$F_0 := 5 \cdot \text{Н}$ $F(t) := F_0 \cdot \sin(v \cdot t)$



Определение коэффициента динамичности

$t := 5 \cdot \text{сек}$ Given $u(F, t) = 2 \cdot \text{см}$ $t_{\text{max}} := \text{Minerr}(t)$

$t_{\text{max}} = 4.77 \text{ сек}$ $u(F, t_{\text{max}}) = 20 \text{ мм}$

$k_{\text{Д}} := \frac{u(F, t_{\text{max}})}{\Delta}$ $k_{\text{Д}} = 5.097$ максимальное динамическое напряжение

$\sigma_{\text{Д}} := k_{\text{Д}} \cdot \sigma$ $\sigma_{\text{Д}} = 60 \text{ МПа}$

Рис. 36П.8. Вынужденные колебания балки в момент резонанса при гармонической нагрузке

Визуально по графику колебаний или с помощью функции **minerr** определяется динамическая амплитуда колебаний (рис. 36П.8). Следует заметить, что функция **minerr** вычисляет экстремум лишь одного отдельно взятого периода колебаний, поэтому в качестве начального приближения надо взять время наступления стационарного колебательного процесса.

Коэффициент динамичности найден как отношение максимальной амплитуды колебаний при резонансе к статическому перемещению от амплитуды вынуждающей силы F_0 .

Максимальные динамические напряжения найдены по тем же формулам, что и при ударе.

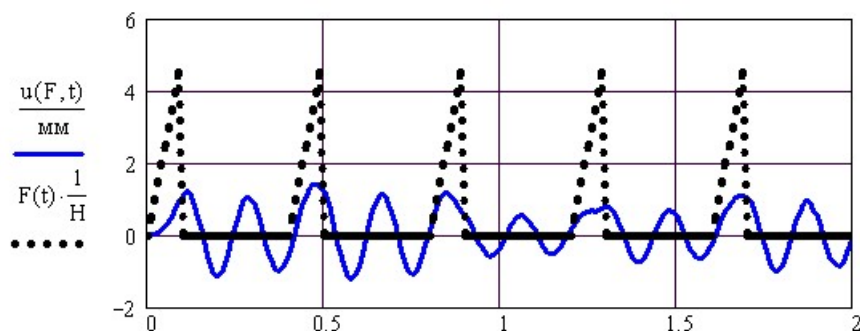
На рис. 36П.9 и 36П.10 показаны перемещения балки при действии других видов возмущающей силы: пилообразной нагрузки и прямоугольной. Поменяйте продолжительность действия силы и паузы между импульсами и посмотрите изменение отклика балки.

действие силы пауза

$t1 := 0.1 \cdot \text{сек}$ $t2 := 0.3 \cdot \text{сек}$ $T := t1 + t2$

$t := 0, 0.01 \cdot \text{сек}.. 2 \cdot \text{сек}$

$n(t) := \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)$ $F(t) := \text{if} \left[t < n(t) \cdot T + t1, F_0 \cdot \frac{(t - n(t) \cdot T)}{t1}, 0 \right]$



137

действие силы пауза
 $t1 := 0.1 \cdot \text{сек}$ $t2 := 0.3 \cdot \text{сек}$ $T := t1 + t2$

$t := 0, 0.01 \cdot \text{сек}.. 2 \cdot \text{сек}$

Задайте $T=0.174$ сек -
 это резонанс, когда $\nu = \omega$

$n(t) := \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)$ $F(t) := \text{if}(t < n(t) \cdot T + t1, F_0, 0)$

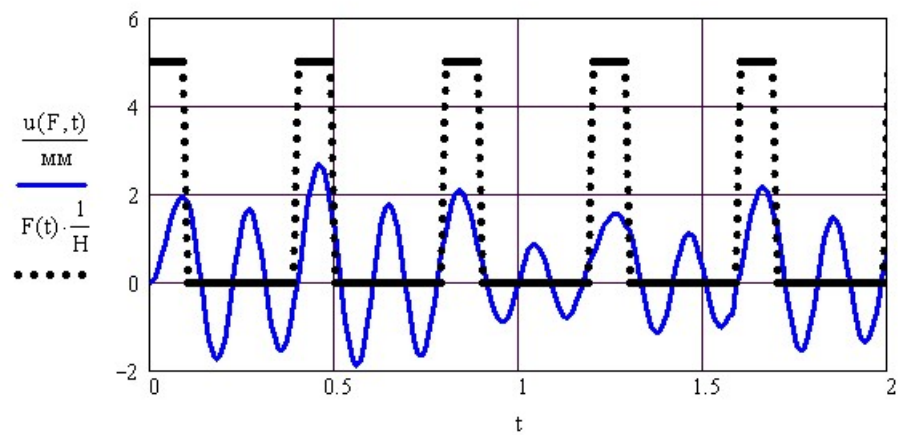


Рис. 36П.10. Перемещения балки при действии прямоугольной нагрузки

Пример 37. Расчет балки на двух опорах на удар и колебания.

(Программа 37-*koleb2.mcd*)

Особенностью расчета балки на двух опорах по сравнению с расчетом консольной балки (пример 36) является необходимость определения опорных реакций. В начале расчета неизвестные реакции включаются в параметры функций. Поэтому в данной программе модифицированы операторы, связанные с использованием изгибающих моментов. Динамические расчеты для любых балок полностью совпадают. Расчетная схема балки показана на рис. 37П.1.

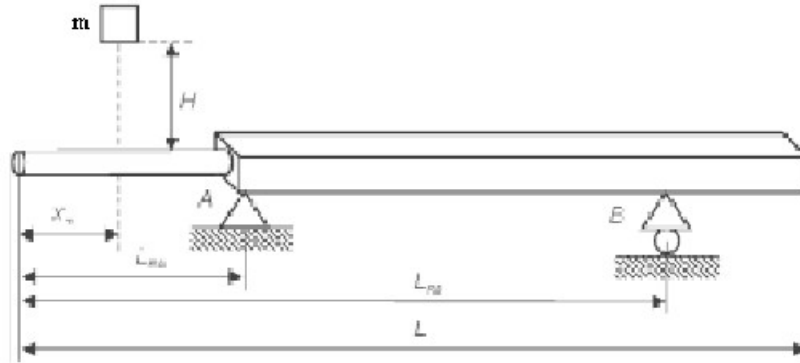


Рис. 37П.1. Расчетная схема балки на двух опорах

Балка ступенчатого поперечного сечения. Консоль — круглого поперечного сечения. Участок между опорами — прямоугольного сечения. Форму сечения можно задать любую. Балка стальная. Для нее заданы модуль Юнга E и плотность ρ .

Для данной балки на двух опорах массой m_0 определить:

- ❑ максимальные динамические напряжения при падении на балку груза массой m в точку с координатой x_m ,
- ❑ собственную частоту колебаний с учетом массы балки и сосредоточенной массы в точке x_m ,
- ❑ Перемещение точки x_m балки под действием возмущающей силы $F(t)$, приложенной к этой точке.

Программа расчета позволяет менять положение опор на балке (L_{RA} и L_{RB}) и координату точки падения груза x_m . В приведенном далее расчете использована балка длиной L на двух опорах с консолью длиной $L_{RA} = 40$ см (рис. 37П.1). Груз падает в точку $x_m = 0$ на свободном конце консоли.

Расчет ведется с учетом размерностей.

Исходные данные для расчета показаны на рис. 37П.2. На том же рисунке приведен расчет площадей поперечного сечения $A(x)$, моментов инерции $J(x)$ и массы балки m_0 .

Исходные данные

$$b := 3 \cdot \text{см} \quad hh := 2 \cdot \text{см} \quad d := 2 \cdot \text{см} \quad E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} \quad \rho := 7800 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

положение опор на балке

$$L_{RA} := 40 \cdot \text{см} \quad L_{RB} := 100 \cdot \text{см} \quad \text{поменяйте положение опор}$$

$$L := 100 \cdot \text{см} \quad m := 5 \cdot \text{кг} \quad \text{масса падающего груза}$$

Площадь сечения

$$A(x) := \begin{cases} \frac{\pi \cdot d^2}{4} & \text{if } x < L_{RA} \\ (b \cdot hh) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Масса балки

$$m_0 := \int_0^L \rho \cdot A(x) \, dx$$

$$m_0 = 3.8 \text{ кг}$$

Момент инерции сечения

$$J(x) := \begin{cases} \frac{\pi \cdot d^4}{64} & \text{if } x < L_{RA} \\ \frac{b \cdot hh^3}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Точка соударения

$$x_m := 0.0 \cdot L$$

поменяйте x_m

Вес падающего груза

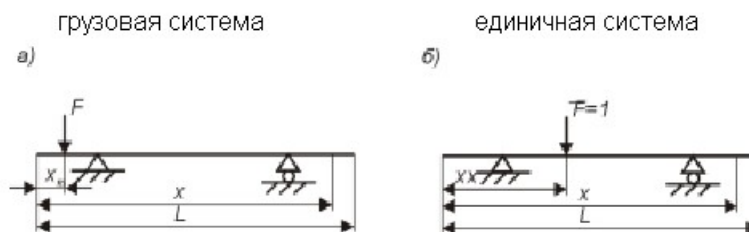
$$F := m \cdot g \quad F = 49.05 \text{ Н}$$

Рис. 14.12. Исходные данные для расчета балки на двух опорах**Определение коэффициента приведения массы**

Для динамического расчета балки как системы с одной степенью свободы определяется коэффициент приведения массы $k_{пр}$ в точку соударения x_m . Расчет

ведется по формуле
$$k_{пр} = \frac{1}{m_0} \int_0^L \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 dm.$$

Перемещения в этой формуле определяются с помощью интеграла Мора. Грузовое и единичное состояния балки для определения перемещения в произвольном сечении показаны на рис. 37П.3. Координата xx точки, где определяется перемещение, изменяется по длине балки.

**Рис. 37П.3.** Грузовая и единичная системы для расчета балки на двух опорах

Определение внутренних усилий при изгибе балки на двух опорах рассматривалось ранее в двух примерах:

- **Пример 12 (Определение внутренних усилий при изгибе балки на двух опорах).**
- **Пример 20 (Расчет на изгиб балки на двух опорах),**

В указанных примерах балки были нагружены большим числом нагрузок. Опорные реакции в начале расчета были включены в параметры функции, а затем определены с помощью вычислительного блока Given-Find путем решения системы уравнений итерационным методом.

Преимуществом такого решения является универсальность, возможность его применения при любых заданных нагрузках на балку.

Недостатком являются большое время расчета при вычислении интеграла Мора, когда в процессе вычислений сотни раз повторяется итерационная процедура расчета.

В данном примере рассматривается простой случай нагружения, когда балка нагружена одной единственной силой веса падающего груза. В этом случае можно вручную записать простые выражения для определения реакций опор и вставить их расчетную программу. Такой расчет показан на рис. 37П.4 для грузовой системы.

Для единичной системы тот же расчет оформлен в виде подпрограммы. Требуется определять перемещение в произвольном сечении $0 \leq xx \leq L$, следовательно, многократно надо определять реакции опор и изгибающий момент $M1(xx)$. В

подпрограмму вместо xx параметр назван LL (рис. 37П.4). Для проверки правильности решения на рис. 37П.5 приведены эпюры $M(x)$ и $M1(LL, x)$. Поменяйте величину LL , эпюра $M1$ изменится. Для украшения программы выполнена анимация рис. 37П.5. Номер кадра — это величина $FRAME$. При подготовке анимации задается диапазон значений $FRAME$. Координата точки приложения единичной силы LL есть функция от $FRAME$. Фактически анимация представляет собой последовательность кадров, изготовленных при заданных значениях $FRAME$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Перед изготовлением анимации отключите выражение $LL := 0.7 \cdot L$ на рис. 14.14.

Определение реакций для грузовой системы

$$R_A := \frac{F \cdot (L_{RB} - x_m)}{L_{RB} - L_{RA}} \quad R_A = 81.75 \text{ Н}$$

$$R_B := F - R_A \quad R_B = -32.7 \text{ Н}$$

изгибающие моменты от внешних сил

$$M(x) := [R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})] - F \cdot (x - x_m) \cdot (x > x_m)$$

определение опорных реакций и изгибающего момента для единичной системы

$$M1(R_A, R_B, LL, x) := [R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})] - 1 \cdot (x - LL) \cdot (x > LL)$$

$$M1(LL, x) := \begin{cases} R_A \leftarrow \frac{L_{RB} - LL}{L_{RB} - L_{RA}} \\ R_B \leftarrow 1 - R_A \\ M1(R_A, R_B, LL, x) \end{cases}$$

поменяйте LL - координату точки приложения единичной силы
 $LL := L \cdot 0.05 \cdot FRAME$
 $x := 0 \cdot m, \frac{L}{50} \dots L$

Рис. 37П.4. Определение изгибающих моментов для грузовой и единичных систем

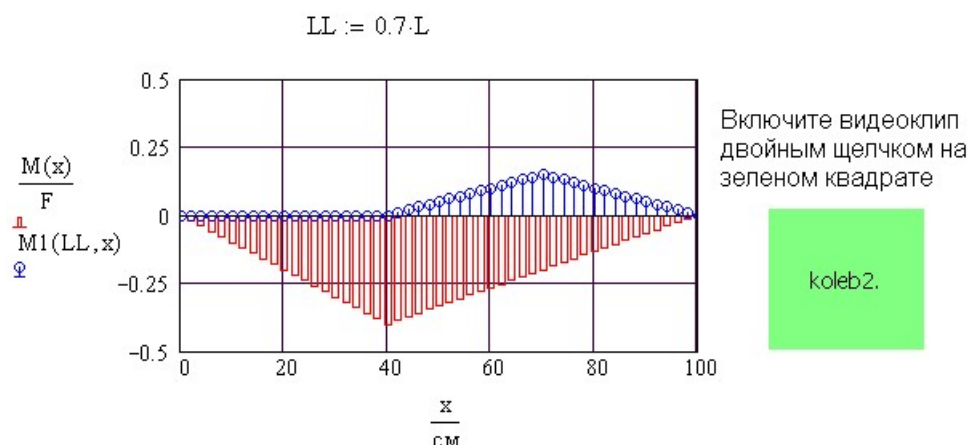


Рис. 37П.5. Эпюры изгибающих моментов для грузовой и единичных систем

Выражения для изгибающих моментов использованы при определении коэффициента приведения массы $k_{пр}$ (рис. 37П.6). Поскольку в данном примере сечение балки переменное, то изменилось выражение для определения собственной массы балки и соответственно изменилось выражение для $k_{пр}$.

перемещение в точке соударения

перемещение в произвольной точке

$$\Delta := \int_0^L \frac{M(x) \cdot M1(x_m, x)}{E \cdot J(x)} dx \quad \Delta = 1.076 \text{ мм}$$

$$\Delta_x(x) := \int_0^L \frac{M(x) \cdot M1(x, x)}{E \cdot J(x)} dx$$

коэффициент
приведения
массы

$$k_{пр} := \frac{\rho}{m_0 \cdot \Delta} \int_0^L A(x) \cdot \Delta_x(x)^2 dx \quad k_{пр} = 0.074$$

Рис. 37П.6. Определение коэффициента приведения массы для ступенчатой балки

Последующий динамический расчет балки на двух опорах полностью совпадает с расчетом консольной балки, показанным на рис. 36П.5 – 36П.10.

Пример 38. Расчет сложной системы на удар и устойчивость.

(Программа 38-koleb3.mcd)

Данный пример является продолжением примера 27 (Определение перемещения сложной системы). Различие состоит в том, что в примере 27 нагрузка была задана. В данном примере цель расчета определение допускаемой нагрузки, поэтому неизвестная нагрузка Q включена в параметры всех промежуточных функций.

Рассмотрим систему из двух балок, связанных между собой стержнем и пружиной. Определение перемещений этой системы при статическом приложении нагрузки рассмотрено в примере 27. В нашем примере на верхнюю балку падает груз весом Q с высоты H (рис. 38П.1). Исходные данные для расчета приведены на рис. 38П.2.

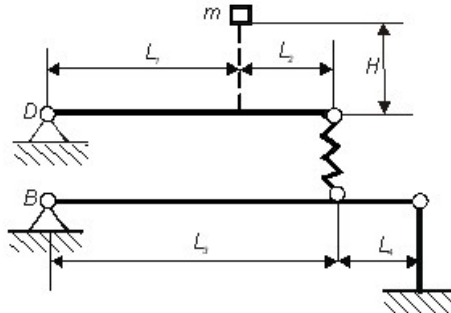


Рис. 38П.1. Вертикальный удар сложной системы

Исходные данные

масса падающего груза $m := 10 \text{ kg}$

высота падения груза $H := 60 \text{ см}$

вес груза $Q := m \cdot g$ $Q = 98.066 \text{ Н}$

по умолчанию g - ускорение свободного падения

$h := 2 \text{ см}$ $b := 4 \text{ см}$

высота и ширина сечения балок

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad W := \frac{b \cdot h^2}{6} \quad J = 2.667 \text{ см}^4 \quad W = 2.667 \text{ см}^3$$

жесткость пружины $K_{\text{пр}} := 100 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$

для стержня

длина стержня $L_{\text{ст}} := 20 \text{ см}$

сторона квадратного сечения стержня $a := 5 \text{ мм}$

площадь сечения $A := a^2$ $A = 0.25 \text{ см}^2$

Для балок (сечения двух балок одинаковые)

длины участков балок $L := (20 \ 10 \ 30 \ 10)^T \cdot \text{см}$

Рис. 38П.2. Исходные данные к расчету сложной системы на удар

Требуется определить допускаемый вес груза Q из условия прочности и динамический угол поворота сечения балки на опоре D .

$$\max \sigma_{\text{дин}} = k_d \max \sigma_{\text{стат}} \leq [\sigma].$$

Коэффициент динамичности в этой задаче определим по приближенной формуле без

учета массы упругой системы $k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{\text{стат}}}}$.

Динамический угол поворота сечения балки на опоре D пропорционален статическому

$$\theta_{D,\text{дин}} = k_d \theta_{D,\text{стат}}.$$

Таким образом, в ходе расчета надо определить два статических перемещения: статическое перемещение точки соударения в направлении удара и статический угол поворота сечения D .

в грузовом состоянии

$$N1(Q) := \frac{Q \cdot L_1}{L_1 + L_2} \quad N2(Q) := \frac{N1(Q) \cdot L_3}{L_3 + L_4} \quad N1(Q) = 0.667 Q \quad N2(Q) = 0.5 Q$$

в единичном состоянии

$$N11 := \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad N21 := \frac{N11 \cdot L_3}{L_3 + L_4} \quad N11 = 0.667 \quad N21 = 0.5$$

Определение опорных реакций балок

в грузовом состоянии

$$R_A(Q) := Q - N1(Q) \quad R_B(Q) := N1(Q) - N2(Q) \quad R_A(Q) = 0.333 Q \quad R_B(Q) = 0.167 Q$$

в единичном состоянии

$$R1_A := 1 - N11 \quad R1_B := N11 - N21 \quad R1_A = 0.333 \quad R1_B = 0.167$$

Изгибающие моменты на 4-х участках 2-х балок

от внешних сил

$$M(Q, x) := \begin{pmatrix} R_A(Q) \cdot x \\ N1(Q) \cdot x \\ R_B(Q) \cdot x \\ N2(Q) \cdot x \end{pmatrix}$$

от единичной силы

$$M1(x) := \begin{pmatrix} R1_A \cdot x \\ N11 \cdot x \\ R1_B \cdot x \\ N21 \cdot x \end{pmatrix}$$

$$n := \text{rows}(M(Q, L)) \quad n = 4$$

Рис. 38П.3. Определение внутренних усилий в элементах сложной системы при статическом нагружении

В начале расчета определяются внутренние усилия в элементах сложной системы. Для их определения сложную систему разделяют на отдельные элементы. Поскольку рассматриваемая система (рис. 38П.1) та же, что в примере 27 (рис. 27П.1), то и схемы грузовой и единичных систем те же, что на рис. 27П.3. Разбиение на элементы этой системы показано на рис. 27П.4. Определение внутренних усилий в грузовой и единичной системах показано на рис. 38П.3. В отличие от расчета в примере 27 (рис. 27П.5) в нашем примере неизвестная заранее сила Q входит в параметры всех функций.

Для наглядности расчета и вывода промежуточных результатов в исходные данные включен вес груза $Q = 100$ Н, который затем определяется из условия прочности и окончательно будет получено $Q = 85$ Н.

Далее определяются статическое перемещение точки соударения для определения коэффициента динамичности и статический угол поворота сечения D (рис. 38П.4). Там же определен коэффициент динамичности $k_d(Q)$.

статическое перемещение точки приложения силы

$$\Delta_{\text{стат}}(Q) := \frac{N1(Q) \cdot N11}{K_{\text{пр}}} + \frac{N2(Q) \cdot N21}{E \cdot A} \cdot L_{\text{ст}} + \sum_{k=1}^n \int_0^{L_k} \frac{M(Q, x) \cdot M1(x)}{E \cdot J} dx$$

$$\Delta_{\text{стат}}(Q) = 0.626 \text{ мм} \quad k_d(Q) := \sqrt{\frac{2 \cdot H}{\Delta_{\text{стат}}(Q)}} \quad \text{коэффициент динамичности}$$

$$k_d(Q) = 43.789$$

определение угла поворота заданной точки D

$$N11 := \frac{1}{L_1 + L_2} \quad N21 := \frac{N11 \cdot L_3}{L_3 + L_4} \quad N11 = 3.333 \text{ м}^{-1} \quad N21 = 2.5 \text{ м}^{-1}$$

$$R1_A := -N11 \quad R1_B := N11 - N21$$

$$R1_A = -3.333 \text{ м}^{-1} \quad R1_B = 0.833 \text{ м}^{-1}$$

$$M1(x) := \begin{pmatrix} R1_A \cdot x \\ N11 \cdot x \\ R1_B \cdot x \\ N21 \cdot x \end{pmatrix}$$

$$\theta_{\text{стат.D}}(Q) := \frac{N1(Q) \cdot N11}{K_{\text{пр}}} + \frac{N2(Q) \cdot N21}{E \cdot A} \cdot L_{\text{ст}} + \sum_{k=1}^n \int_0^{L_k} \frac{M(Q, x) \cdot M1(x)}{E \cdot J} dx$$

Рис. 38П.4. Определение перемещений сложной системы при статическом нагружении

Динамические напряжения прямо пропорциональны статическим и их определение показано на рис. 38П.5. Максимальный изгибающий момент в балках определяется из простых логических положений, как вершина треугольной эпюры изгибающих моментов. Из условия прочности найден допускаемый вес падающего груза и реальный коэффициент динамичности, соответствующий найденному допустимому весу груза.

$$\theta_{\text{дин.D}}(Q) := k_d(Q) \cdot \theta_{\text{стат.D}}(Q)$$

$$\theta_{\text{дин.D}}(Q) = 6.9 \text{ град}$$

$$\max M(Q) := \max \left(\begin{pmatrix} R_A(Q) \cdot L_1 \\ R_B(Q) \cdot L_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\max \sigma_{\text{дин}}(Q) := \frac{\max M(Q)}{W} \cdot k_d(Q)$$

$$\max M(Q) = 6.538 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$\max \sigma_{\text{дин}}(Q) = 107.357 \text{ МПа}$$

Определение допустимого веса груза QQ из условия прочности

$$QQ := \text{root}(|\max \sigma_{\text{дин}}(Q) - \sigma_{\text{доп}}|, Q)$$

$$QQ = 85.1 \text{ Н}$$

$$k_d(QQ) = 47$$

Рис. 38П.5. Динамический расчет сложной системы

Сжатый стержень в нашей сложной системе надо проверить на устойчивость, найдя

критическое напряжение в нем и коэффициент запаса устойчивости $n = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\max \sigma_{\text{дин}}}$.

Для выбора формулы, по которой определяется критическое напряжение, сначала находится гибкость стержня λ . Если гибкость стержня $\lambda > 100$, расчет ведется по формуле Эйлера. Если $\lambda < 100$, расчет ведется по формуле Ясинского (рис. 38П.6).

Рассчитанный коэффициент запаса устойчивости $n_y = 2,5$ удовлетворяет условию устойчивости.

расчет сжатого стержня на устойчивость

$$\mu := 0.7$$

$$J := \frac{a^4}{12}$$

$$F := a^2$$

$$\lambda := \frac{\mu \cdot L_{\text{ст}}}{\sqrt{\frac{J}{F}}}$$

$$\lambda = 96.995$$

$$\sigma_{\text{кр}} := \begin{cases} \left(\pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \right) & \text{if } \lambda > 100 \\ (310 - 1.14 \cdot \lambda) \cdot \text{МПа} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{кр}} = 199 \text{ МПа}$$

(для стали Ст3)

динамические напряжения в сжатом стержне

$$\sigma_{\text{стат}}(QQ) := \frac{N2(QQ)}{F}$$

$$\sigma_{\text{дин}}(QQ) := \sigma_{\text{стат}}(QQ) \cdot k_d(QQ)$$

$$\sigma_{\text{дин}}(QQ) = 80 \text{ МПа}$$

коэффициент запаса устойчивости

$$n_y(QQ) := \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{дин}}(QQ)}$$

$$n_y(QQ) = 2.493$$

Рис. 38П.6. Расчет сжатого стержня на устойчивость

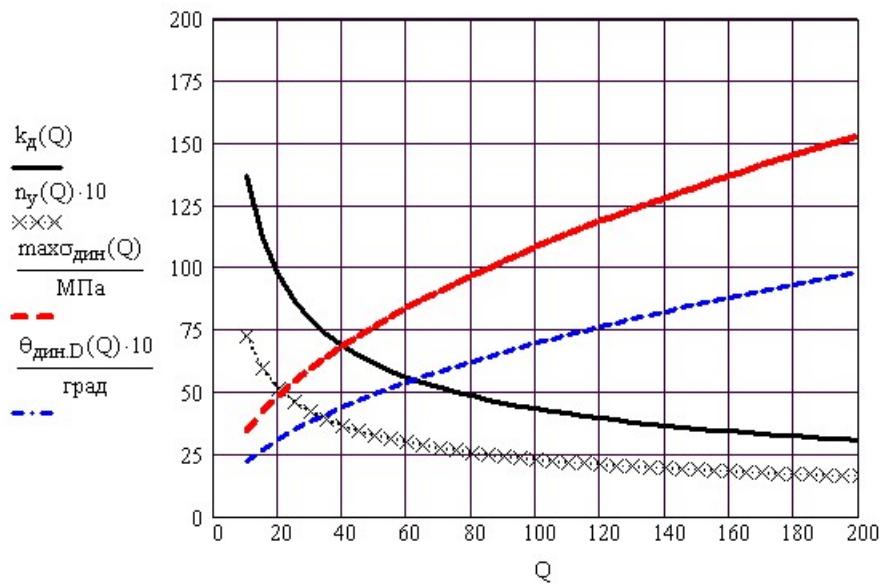


Рис. 38П.7. Зависимость результатов расчета от веса Q падающего груза

На рис.38П.7 показана зависимость результатов расчета от веса падающего груза Q . С ростом величины Q падает коэффициент динамичности k_d и коэффициент запаса устойчивости n_y . Максимальные динамические напряжения и динамический угол поворота сечения D с ростом нагрузки естественно возрастают, хотя и не пропорционально ей.

Обратите внимание на размерности при выводе графиков. Расчет ведется с учетом размерностей. Mathcad строит графики без учета размерностей. Результаты расчета выводит в стандартных базовых размерностях, в которых и производится весь расчет во внутреннем алгоритме Mathcad.

Чтобы увидеть результаты в нужной нам размерности, требуется умножить результат в стандартной размерности на производную размерность, играющую роль числового коэффициента.

В нашем примере вес (сила) измеряется в ньютонах, являющихся базовой размерностью, поэтому умножать или делить выражения на ньютон оказывается необязательно. Дискретная переменная Q может быть записана как с учетом размерности, так и без него. Результат расчета и вид графиков при этом не меняется.

Пример 39. Статистическая обработка результатов эксперимента.

145

(Программа 39-ustal1.mcd)

На рисунке 39П.1 приведены результаты испытаний серии из 10 стальных образцов. Требуется построить усталостную кривую и определить доверительный интервал для вероятности неразрушения образцов $P = 99\%$.

Находим логарифмы напряжений $\log(\sigma)$ и чисел циклов $\log(N)$. С помощью функции **line** находим коэффициенты аппроксимирующей прямой и строим усталостную кривую, соответствующую вероятности неразрушения 50% (рис. 39П.2).

Расчет без учета размерностей

Результаты эксперимента: (число циклов до разрушения N в зависимости от максимального напряжения в детали σ)

$\sigma := (63.09 \ 56.23 \ 50.11 \ 44.66 \ 39.81 \ 35.48 \ 31.18 \ 27.91 \ 25.11 \ 22.38)^T$ МПа

$N := (13 \ 25 \ 63 \ 936 \ 7.81 \cdot 10^3 \ 1.13 \cdot 10^4 \ 1.98 \cdot 10^5 \ 8.16 \cdot 10^5 \ 5.15 \cdot 10^5 \ 3.16 \cdot 10^6)^T$ циклов

$Y := \log(\sigma) \quad X := \log(N) \quad n := \text{rows}(N) \quad i := 1..n$

Подбор аппроксимирующего уравнения

$aa := \text{line}(X, Y) \quad aa = \begin{pmatrix} 1.867 \\ -0.076 \end{pmatrix} \quad y := aa_1 + aa_2 \cdot X$

почти то же самое $aa := \text{medfit}(X, Y) \quad aa = \begin{pmatrix} 1.846 \\ -0.072 \end{pmatrix}$

коэффициент корреляции $\text{corr}(X, Y) = -0.986$ Коэффициент корреляции 0,986
ковариация $\text{cvar}(X, Y) = -0.268$ свидетельствует о хорошей связи
среднее квадратичное $\text{stdev}(X) = 1.88$ двух величин X и Y .

Рис. 39П.1. Обработка результатов усталостных испытаний

Определение доверительного интервала с вероятностью 99%

по Стьюденту квантиль $t := \text{qt}(0.99, n) \quad t = 2.764$

$s := \text{stdev}(X) \cdot \sqrt{1 - \text{corr}(X, Y)^2} \quad s = 0.309$

Ширина доверительного интервала $2 \cdot t \cdot s \quad X - t \cdot s < X_{\text{среднее}} < X + t \cdot s$

верхняя и нижняя границы доверительного интервала $y1 := aa_1 + aa_2 \cdot (X + t \cdot s)$ $y2 := aa_1 + aa_2 \cdot (X - t \cdot s)$ Опытные данные в логарифмических координатах (двойной щелчок на графике - выбрать: log. scale)

доверительный интервал

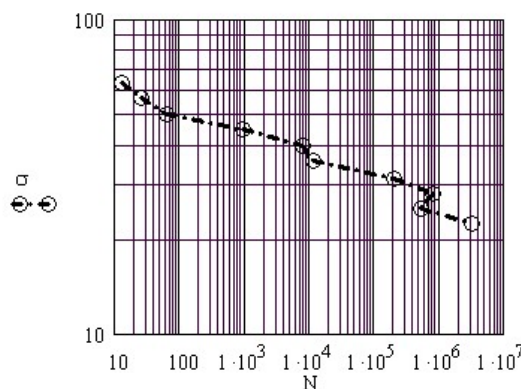
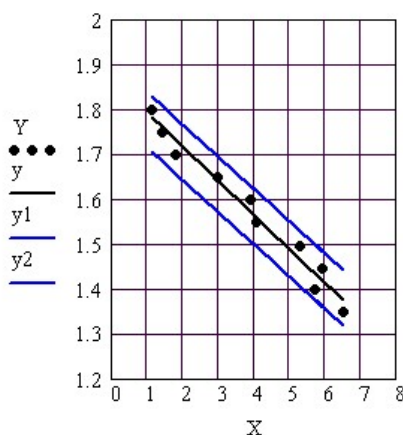


Рис. 39П.2. Построение усталостной кривой

Определяем среднеквадратическое отклонение и квантиль вероятности $qt(P)$, соответствующий заданной вероятности P . При малом числе испытаний вместо нормального распределения используем распределение Стьюдента. Записываем уравнения верхней и нижней границ доверительного интервала и строим их графики (рис. 39П.2). На том же рисунке справа для представления результатов испытаний использован график, где по осям введены σ и N , но выбрана логарифмическая шкала. В таком случае предварительное логарифмирование исходных данных не нужно.

Пример 40. Расчет болта на усталостную прочность

146

(Программа 40-ustal2.mcd)

Определить диаметр болта, испытывающего нагружение асимметричным циклом растяжения из расчета

- на статическую прочность;
- по пределу выносливости;
- на долговечность $N = 10^5$ циклов.

Схема установки болта и характер нагрузки показаны на рис. 40П.1. Материал болта — сталь 40Х улучшенная, $\sigma_B = 1000$ МПа, $\sigma_T = 800$ МПа. Эффективный коэффициент концентрации напряжений в резьбе $K_\sigma = 2$. Размеры болта малы, поэтому масштабный коэффициент $K_d = 1$. Про остальные коэффициенты (состояния поверхности и упрочнения) ничего неизвестно. Принимаем их равными 1. Тогда коэффициент перехода к пределу выносливости детали

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_V \cdot K_A} = 2.$$

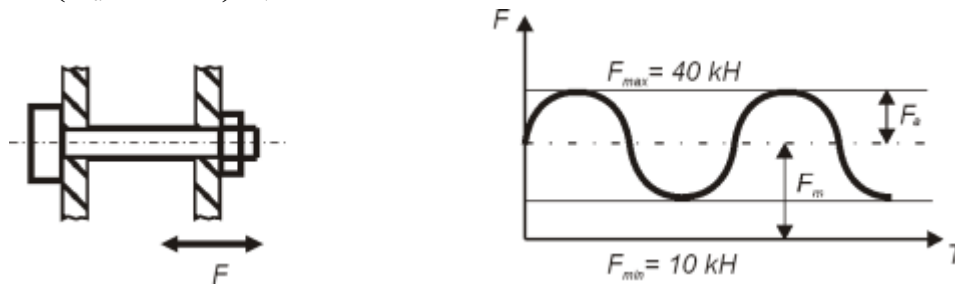


Рис. 40П.1. Схема нагружения болта

Максимальная и минимальная нагрузки на болт, а также допускаемый коэффициент запаса n введены глобально и помещены около графика (рис. 40П.5), чтобы, меняя их и соответственно асимметрию цикла нагружения, наблюдать на графике изменение результатов расчета.

Данный расчет проведен для $n = 2,5$, $P_{\max} = 40$ кН, $P_{\min} = 10$ кН. В этом случае коэффициент асимметрии цикла $r = P_{\min}/P_{\max} = 0,25$.

Расчет ведем с учетом размерностей, поэтому в начале расчета (рис. 40П.2) введены производные размерности, затем исходные данные для расчета, уже в производных размерностях (МПа). Далее введены выражения для амплитудных и средних значений нагрузки и напряжений, как функции от неизвестного пока диаметра болта d .

при симметричном цикле $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{сим}}$

$$\sigma_{\text{сим}} := \frac{0.5 \cdot 0.7 \cdot \sigma_B}{K} \quad d1 := \text{root}(f(d, n, \sigma_{\text{сим}}), d) \quad d1 = 27 \text{ мм}$$

при асимметричном цикле

$$r := \frac{\sigma_{\min}(d)}{\sigma_{\max}(d)} \quad r = 0.25 \quad \text{tg} \beta := \frac{1-r}{1+r} \quad \psi := \frac{\sigma_{\text{сим}}}{S_K} \quad \psi = 0.088$$

$$\text{tg} \beta = 0.6$$

$$\sigma_{\text{ar}} := 10 \cdot \text{МПа} \quad \sigma_{\text{mr}} := 10 \cdot \text{МПа} \quad \text{начальное приближение}$$

$$\text{Given} \quad \sigma_{\text{ar}} = \sigma_{\text{сим}} - \psi \cdot \sigma_{\text{mr}} \quad \sigma_{\text{ar}} = \text{tg} \beta \cdot \sigma_{\text{mr}}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\text{ar}} \\ \sigma_{\text{mr}} \end{pmatrix} := \text{Find}(\sigma_{\text{ar}}, \sigma_{\text{mr}}) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{\text{ar}} \\ \sigma_{\text{mr}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 153 \\ 255 \end{pmatrix} \text{ МПа}$$

$$\sigma_r := \sigma_{\text{ar}} + \sigma_{\text{mr}} \quad \sigma_r = 407 \text{ МПа}$$

$$d2 := \text{root}(f(d, n, \sigma_r), d) \quad d2 = 17.7 \text{ мм}$$

Рис. 40П.2. Исходные данные для расчета болта

Условие прочности болта $n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} \geq [n]$ записано в виде функции $f(d, n, \sigma_{\text{пред}})$,

равной нулю, чтобы использовать ее при решении уравнения функцией **root**, которая не может работать с неравенствами.

Для заданной стали известны лишь пределы прочности и текучести, поэтому расчет ведем по приближенным зависимостям и, естественно, результат получаем тоже приближенный.

Предел выносливости при изгибе при симметричном цикле

$$\sigma_{\text{изгиба}} \approx 0,5\sigma_B = 0,5 \cdot 1000 = 500 \text{ МПа.}$$

Предел выносливости при растяжении при симметричном цикле

$$\sigma_{\text{раст}} \approx 0,7\sigma_{\text{изгиба}} = 0,7 \cdot 500 = 350 \text{ МПа.}$$

Сопротивление разрыву $S_K \approx 2 \cdot \sigma_B = 2000 \text{ МПа.}$

Статический расчет

При статическом расчете $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$. Из условия прочности найден диаметр болта $d = 13 \text{ мм}$. Это внутренний диаметр резьбы, по которому определяем размеры болта с резьбой М16, внутренний диаметр которой $d_{\text{вн}} = 13,26 \text{ мм}$.

Расчет по пределу выносливости

В этом расчете $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_r$. Найдем величину σ_r (рис.40П.3). На этом рисунке предел выносливости детали при симметричном цикле обозначен $\sigma_{\text{сим}}$, так как в Mathcad нельзя записать σ_{-1} (индекс-комментарий не может быть математическим выражением). Везде в выражениях опущен верхний индекс. Система уравнений

$$\sigma_a^{\text{дет}} = \sigma_{-1}^{\text{дет}} - \psi^{\text{дет}} \cdot \sigma_m^{\text{дет}} \quad \text{и} \quad \sigma_a^{\text{дет}} = \text{tg} \beta \cdot \sigma_m^{\text{дет}} \quad \text{обозначены как}$$

$$\sigma_{ar} = \sigma_{\text{сим}} - \psi \cdot \sigma_{am} \quad \text{и} \quad \sigma_{ar} = \text{tg} \psi \cdot \sigma_{mr}.$$

$$\text{Н} \equiv \text{N} \quad \text{мм} \equiv \text{m} \quad \text{МПа} \equiv 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \quad \text{кН} \equiv 1000 \cdot \text{Н} \quad \text{мм} \equiv 0.001 \cdot \text{м}$$

Материал **сталь 40X** $\sigma_B := 1000 \text{ МПа}$ $\sigma_T := 800 \text{ МПа}$ $S_K := 2 \cdot \sigma_B$

$K := 2$ суммарный коэффициент влияния всех факторов на предел выносливости

$N_0 := 3 \cdot 10^6$ циклов базовое число циклов

Остальные исходные данные заданы глобально в конце программы около графика

Характеристики цикла нагружения болта

$$P_a := \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{2} \quad P_m := \frac{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}{2} \quad A(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\sigma_a(d) := \frac{P_a}{A(d)} \quad \sigma_m(d) := \frac{P_m}{A(d)} \quad \sigma_{\text{max}}(d) := \sigma_m(d) + \sigma_a(d) \\ \sigma_{\text{min}}(d) := \sigma_m(d) - \sigma_a(d)$$

условие прочности $n \geq [n]$ $f(d, n, \sigma_{\text{пред}}) := \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}(d)} - n$

Статический расчет

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$$

$$d := 2 \cdot \text{мм} \quad d := \text{root}(f(d, n, \sigma_T), d) \quad d = 12,6 \text{ мм}$$

Рис. 40П.3. расчет болта по пределу выносливости

Решая систему этих двух уравнений с помощью функции **find** определяем предел выносливости детали при асимметричном цикле $\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}}$, обозначенный в Mathcad $\sigma_r = \sigma_{ar} + \sigma_{mr}$.

В условии прочности (в функции $f(d, n, \sigma_{\text{пред}})$) заменяем $\sigma_{\text{пред}}$ на σ_r . Из условия прочности определяем диаметр тяги.

При симметричном цикле $r = -1$ $d1 = 27 \text{ мм}$, берем резьбу М32 ($d_{\text{внутр}} = 28,3$).

При асимметричном цикле $r = -0,5$ $d_2 = 17,7$ мм, резьба М22 ($d_{\text{внутр}} = 18,3$).

148

Расчет на долговечность

Построим усталостную кривую для заданной степени асимметрии цикла $r = -1$ и $r = 0,25$ по двум точкам: $N = 1$ $\sigma = S_K$ и $N = N_0$ $\sigma = \sigma_r$. используя функцию **line**, находим коэффициенты аппроксимирующего уравнения и по уравнению усталостной кривой находим предел ограниченной выносливости $\sigma(NN)$, где NN — заданная долговечность тяги (рис.40П.4).

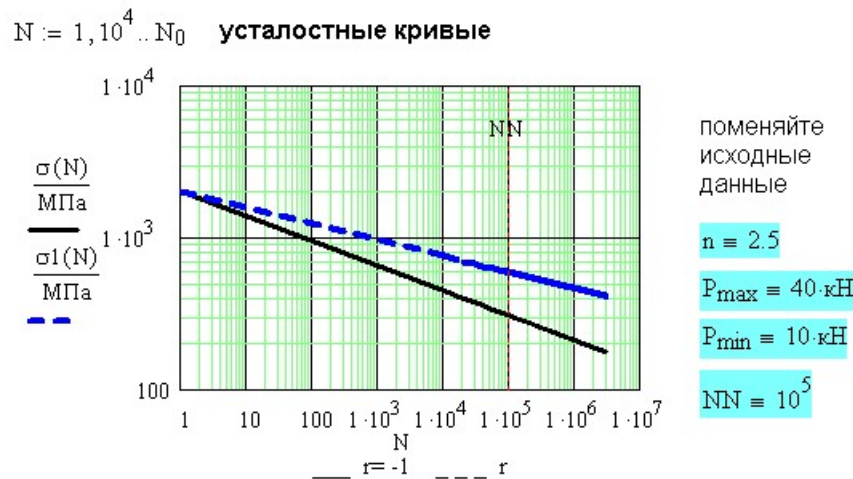
Построение уравнения усталостной кривой

| | |
|--|---|
| при $r = -1$ | при заданном $r = 0.25$ |
| $X := \begin{pmatrix} \log(1) \\ \log(N_0) \end{pmatrix}$ | $Y := \begin{pmatrix} \log\left(\frac{S_K}{\text{МПа}}\right) \\ \log\left(\frac{\sigma_{\text{сим}}}{\text{МПа}}\right) \end{pmatrix}$ |
| $Y := \begin{pmatrix} \log\left(\frac{S_K}{\text{МПа}}\right) \\ \log\left(\frac{\sigma_r}{\text{МПа}}\right) \end{pmatrix}$ | $Y1 := \begin{pmatrix} \log\left(\frac{S_K}{\text{МПа}}\right) \\ \log\left(\frac{\sigma_r}{\text{МПа}}\right) \end{pmatrix}$ |
| при $r = -1$ | при заданном r |
| $C := \text{line}(Y, X)$ $C = \begin{pmatrix} 20.209 \\ -6.122 \end{pmatrix}$ $m := C_1 $ | $C1 := \text{line}(Y1, X)$ $C1 = \begin{pmatrix} 30.936 \\ -9.372 \end{pmatrix}$ $m1 := C1_1 $ |
| $\sigma(N) := \sigma_{\text{сим}} \left(\frac{N_0}{N} \right)^{\frac{1}{m}}$ | $\sigma1(N) := \sigma_r \left(\frac{N_0}{N} \right)^{\frac{1}{m1}}$ |
| $\sigma(NN) = 305 \text{ МПа}$ | $\sigma1(NN) = 585 \text{ МПа}$ |
| $N(\sigma) := N_0 \left(\frac{\sigma_{\text{сим}}}{\sigma} \right)^m$ | $N1(\sigma) := N_0 \left(\frac{\sigma_r}{\sigma} \right)^{m1}$ |
| $\sigma2 := 700 \text{ МПа}$ | $\sigma2 := 700 \text{ МПа}$ |
| $N(\sigma2) = 618$ | $N1(\sigma2) = 1.089 \times 10^5$ |

расчет на долговечность NN

| | | |
|---------------------------------|--|------------------------|
| при симметричном цикле $r = -1$ | $d3 := \text{root}(f(d, n, \sigma(NN)), d)$ | $d3 = 20.4 \text{ мм}$ |
| при асимметричном цикле r | $d4 := \text{root}(f(d, n, \sigma1(NN)), d)$ | $d4 = 14.7 \text{ мм}$ |

Рис. 40П.4. Расчет болта на долговечность



| | | | |
|--------------|--------------------------------|----------------|---------------------------------|
| при $r = -1$ | $\sigma(NN) = 305 \text{ МПа}$ | при $r = 0.25$ | $\sigma1(NN) = 585 \text{ МПа}$ |
|--------------|--------------------------------|----------------|---------------------------------|

Расчетные значения диаметра болта

| | |
|---|--|
| по пределу текучести | $d = 12.6 \text{ мм}$ |
| по пределу выносливости | при $r = -1$ $d1 = 27 \text{ мм}$ при $r = 0.25$ $d2 = 17.7 \text{ мм}$ |
| по пределу ограниченной выносливости при $NN = 1 \cdot 10^5$ циклов | при $r = -1$ $d3 = 20.4 \text{ мм}$ при $r = 0.25$ $d4 = 14.7 \text{ мм}$ |

Рис. 40П.5. Результаты расчета болта

Из условия прочности, в котором $\sigma_{\text{пред}} = \sigma(NN)$, определяем внутренний диаметр резьбы $d = 19,7$ мм и подбираем резьбу М22, имеющую $d_{\text{внутр}} = 20,2$ мм.

При симметричном цикле $r = -1$ $d3 = 20,4$ мм, берем резьбу М24 ($d_{\text{внутр}} = 21,3$).

При асимметричном цикле $r = -0,5$ $d_2 = 14,7$ мм, резьба М18 ($d_{\text{внутр}} = 15,5$).

Усталостная кривая и результаты расчетов показаны на рис. 40П.5. Работая с программой, поменяйте исходные данные, заданные глобально около графиков, и посмотрите на изменение результатов расчета.

Пример 41. Расчет долговечности детали при нестационарном нагружении.

(Программа 41-ustal3.mcd)

Определить срок службы автомобильной оси из стали 18ХНМА, предел прочности которой $\sigma_B = 1200$ МПа. Схема нагружения оси показана на рис. 41П.1. Влияние концентрации напряжений и размеров детали задано отношением $K_\sigma/K_d = 1,6$. Обработка циклограммы нагружения позволила свести процесс нагружения оси к повторению блока нагружения, изображенного на рис. 41П.1. Определить сколько блоков нагружения выдержит ось до разрушения.



Рис. 41П.1. Схема нагружения автомобильной оси, циклограмма и гистограмма ее нагружения

Максимальное и минимальное напряжения цикла и число циклов в каждой ступени блока нагружения введены в расчет на рис. 41П.2. Там же подсчитаны амплитудные и средние значения напряжений.

$$H := N \quad m := m \quad \text{МПа} := 10^6 \cdot \frac{H}{m} \quad \text{ORIGIN} := 1$$

Исходные данные

Материал сталь 18ХНМА $\sigma_B := 1200 \text{ МПа}$ $S_K := 2 \cdot \sigma_B$ $N_0 := 3 \cdot 10^6$ циклов

Влияние концентрации напряжений и размеров детали задано отношением $K := 1,6$

Характеристики одного блока нагружения (по результатам обработки циклограммы)

$$\sigma_{\max} := \begin{pmatrix} 800 \\ 650 \\ 500 \end{pmatrix} \text{ МПа} \quad \sigma_{\min} := \begin{pmatrix} -100 \\ -150 \\ -100 \end{pmatrix} \text{ МПа} \quad N := \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} \text{ циклов}$$

$$\sigma_{\text{сим}} := \frac{0,5 \cdot \sigma_B}{K} \quad \sigma_{\text{сим}} = 375 \text{ МПа} \quad i := 1 \dots \text{rows}(N)$$

$$\sigma_a := \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad \sigma_m := \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad \sigma_{\text{экв}_i} := \frac{\sigma_{a_i}}{1 - \frac{\sigma_{m_i}}{S_K}}$$

Рис. 41П.2. Расчет долговечности детали при нестационарном нагружении

Предел выносливости при симметричном цикле нагружения изгибом определен по приближенной формуле $\sigma_{-1}^{\text{дет}} \approx \frac{0,5 \sigma_{-1}}{K}$, где $K = \left(\frac{K_\sigma}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_V \cdot K_A} = 1,6$.

Поскольку ступени блока нагружения представляют собой асимметричный цикл с различными значениями коэффициента асимметрии r , для каждой ступени надо подобрать соответствующий ей по степени повреждения симметричный цикл.

Диаграмму предельных амплитуд может быть построена не только для пределов выносливости σ_r , но и для пределов ограниченной выносливости $\sigma_{r,N}$, соответствующих заданной долговечности N . Уравнение диаграммы в общем виде

$$\sigma_a = \sigma_{-1,N} - \psi_N \cdot \sigma_m,$$

$$\text{где} \quad \psi_N = \frac{\sigma_{-1,N}}{S_K}, \quad \text{тогда} \quad \sigma_{\text{экв}} = \sigma_a / \left(1 - \frac{\sigma_m}{S_K} \right).$$

Напряжением, эквивалентным заданному, считаем напряжение при симметричном цикле, при котором число циклов до разрушения такое же, как при заданных

значениях σ_a и σ_m . То есть степень повреждения при эквивалентном цикле нагружения такая же, как при заданном цикле.

Для трех ступеней блока нагружения известны σ_a и σ_m , по ним найдены эквивалентные напряжения симметричного цикла и построены диаграммы предельных амплитуд для них (рис. 41П.3), поясняющие смысл $\sigma_{\text{ЭКВ}}$.

Диаграмма предельных амплитуд

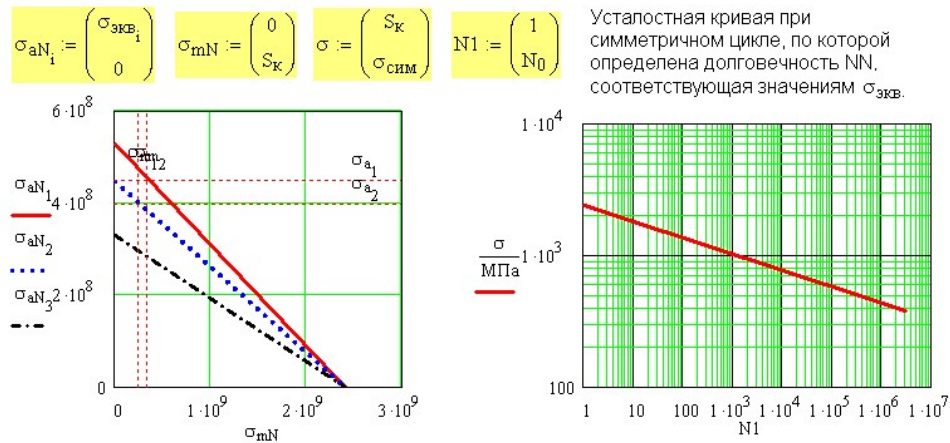


Рис. 41П.3. Построение усталостной кривой для эквивалентного симметричного цикла нагружения

Расчет эквивалентной долговечности NN

$$m := \log \left(\frac{N_0}{\log \left(\frac{S_K}{\text{МПа}} \right) - \log \left(\frac{\sigma_{\text{СИМ}}}{\text{МПа}} \right)} \right)$$

$$NN_i := \begin{cases} N_0 \cdot \left(\frac{\sigma_{\text{СИМ}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}_i}} \right)^m & \text{if } \sigma_{\text{ЭКВ}_i} > \sigma_{\text{СИМ}} \\ 10^{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\omega_{\text{блока}} := \sum_{i=1}^{\text{rows}(N)} \frac{N_i}{NN_i}$$

$\omega_{\text{блока}} = 0.0001362$

число блоков до разрушения

$$n := \frac{1}{\omega_{\text{блока}}} \quad n = 7345$$

Промежуточные результаты расчета

| | | | | | | | |
|---|------|-----|-----|-----|---------|-------------------|--------|
| $\sigma_{\text{max}_1} : \sigma_{\text{min}_1} = \sigma_{a_1} = \sigma_{m_1} = \sigma_{\text{ЭКВ}_1} =$ | | | | | $N_i =$ | $NN_i =$ | ЦИКЛОВ |
| 800 | -100 | 450 | 350 | 527 | 10 | $3 \cdot 10^6$ | |
| 650 | -150 | 400 | 250 | 447 | 100 | $10 \cdot 10^6$ | |
| 500 | -100 | 300 | 200 | 327 | 1000 | $1 \cdot 10^{10}$ | |

Рис. 41П.4. Результаты расчета детали при нестационарном нагружении

Построена усталостная кривая при симметричном цикле, по которой определена долговечность, соответствующая значениям $\sigma_{\text{ЭКВ}}$. Аналитическое определение долговечности по уравнению этой усталостной кривой показано на рис. 41П.4.

Зная число циклов действия каждой ступени нагружения N и число циклов NN , вызывающих разрушение при данном напряжении $\sigma_{\text{ЭКВ}}$, по гипотезе линейного суммирования повреждений определяем повреждение $\omega_{\text{блока}}$, накопленное за 1 блок нагружения и число блоков до разрушения $n = 1/\omega_{\text{блока}}$. Результаты расчета приведены на рис. 41П.4.

Обратите внимание, что Mathcad не может вычислить логарифм от размерного числа, поэтому при вычислении показателя степени m напряжения разделены на размерность. Как и в предыдущих примерах предел выносливости при симметричном цикле вместо σ_{-1} обозначен $\sigma_{\text{СИМ}}$.

Пример 42. Расчет долговечности полосы с трещиной.

152

(Программа 42-razruchenie.mcd)

В полосе из стали 20Х (рис. 42П.1) обнаружена боковая трещина длиной $L_0 = 2$ мм. Полоса испытывает пульсирующий цикл нагружения. Для стали 20Х $\sigma_T = 600$ МПа, $K_{Ic} = 40$ МПа $\sqrt{м}$. Как характеристика материала приводится экспериментально найденная зависимость $\frac{dL}{dN} = 1,5 \cdot 10^{-13} (\Delta K)^3$.

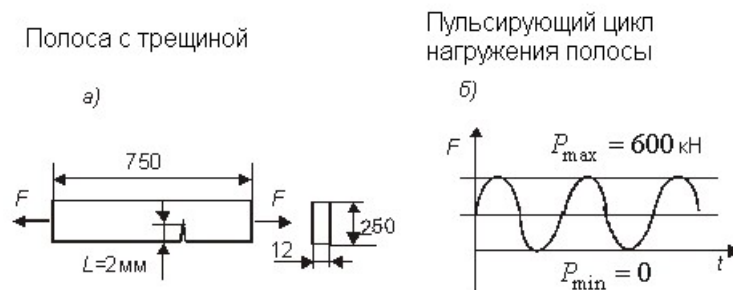


Рис. 42П.1. Полоса с трещиной под действием пульсирующей нагрузки

Определить число циклов подрастания трещины до критической длины $L_{кр}$.

Вначале найдем критическую длину трещины $L_{кр}$ из условия разрушения $K_I = K_{Ic}$.

$$K_I = \sigma_{ном} \sqrt{\pi L_{кр}} \cdot f = K_{Ic}.$$

Поправочный коэффициент $f = 1,12$ для полосы с боковой трещиной определен по справочнику.

Номинальное напряжение при растяжении полосы $\sigma_{ном} = \frac{F}{A}$.

Критическая длина трещины $L_{кр} = \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{ном}} \right)^2 \frac{1}{\pi}$ для плоского напряженного состояния (рис. 42П.2).

$$м := м \quad мм := 0.001 \cdot м \quad Н := Н \quad кН := 1000 \cdot Н \quad МПа := 10^6 \cdot \frac{Н}{м^2}$$

Определение критической длины трещины

Исходные данные

$$\sigma_T := 600 \cdot МПа \quad K_{Ic} := 40 \cdot МПа \cdot \sqrt{м}$$

$$\text{размеры сечения} \quad b := 12 \cdot мм \quad h := 250 \cdot мм \quad F := 600 \cdot кН$$

$$\text{поправка для } K_{Ic} \quad f := 1.12$$

$$L_0 := 1 \cdot мм \quad A := b \cdot (h - L_0)$$

$$\text{номинальные напряжения} \quad \sigma := \frac{F}{A} \quad \sigma = 201 \cdot МПа$$

критическую длину трещины $L_{кр}$ найдем из условия разрушения $K_I = \sigma_{ном} \sqrt{\pi L_{кр}} \cdot f = K_{Ic}$

$$L_{кр} := \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\pi} \quad L_{кр} = 12.6 \cdot мм$$

Рис. 42П.2. Расчет критической длины трещины

Долговечность полосы с трещиной найдем из формулы Пэриса $\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^n$, где

$$\Delta K = K_{I(от F_{max})} - K_{I(от F_{min})} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \sqrt{\pi L} \cdot f.$$

Интегрируя формулу Пэриса, получаем число циклов до разрушения

$$N = \int_{L_0}^{L_{кр}} \frac{dL}{C(\Delta K)^n}.$$

Результаты расчета долговечности показаны на рис. 42П.3.

Расчет долговечности полосы

Формула Пэриса $\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^n$

для стали 20 $n := 3$ $C := 1.5 \cdot 10^{-13} \cdot \text{МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}^{-3}$

Размах изменения коэффициента интенсивности напряжений

$$\Delta K = K_{I(\sigma_{\text{max}})} - K_{I(\sigma_{\text{min}})} = (\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}) \sqrt{\pi L} \cdot f$$

при пульсирующем цикле

$$\Delta K(L) := \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot L} \cdot f \quad N(L_0) := \int_{L_0}^{L_{кр}} \frac{1}{C \cdot \Delta K(L)^n} dL \quad N(L_0) = 4.78 \times 10^6 \text{ циклов}$$

$LL := 1 \cdot \text{мм}, 1.1 \cdot \text{мм} \dots L_{кр}$

Долговечность полосы при исходной длине трещины LL

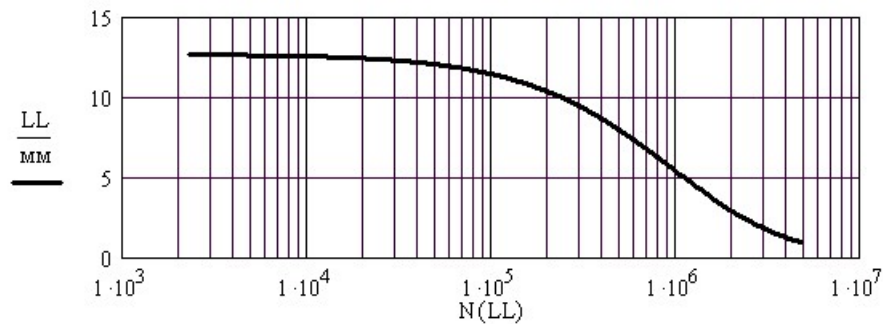


Рис. 42П.3. Расчет долговечности полосы с трещиной (окончание)

Как видно из расчетов, для подрастания трещины с 1 мм до критической длины 12,5 мм потребуется 4,5 млн циклов. На графике (рис. 42П.3) приведена зависимость числа циклов до разрушения от размера исходной трещины LL .

Пример 43. Построение диаграммы истинных напряжений.

(Программа 43-diag.mcd)

Такая диаграмма строится по результатам испытаний стандартного образца на растяжение.

По замерам образца до и после испытаний в расчет вводим начальные длину L_0 и диаметр образца d_0 , а также диаметр образца в шейке после разрыва d_k .

С нарисованной испытательной машиной диаграммы в координатах нагрузка – перемещение снимают координаты нескольких характерных точек: начала и конца площадки текучести, точек, соответствующих максимальной нагрузке на образец и моменту разрыва образца. Кроме того, для последующей аппроксимации диаграммы деформирования необходимы координаты по крайней мере двух точек между пределом текучести и пределом прочности. Чтобы на диаграмме был виден участок упругости, введена точка начала нагружения с координатами (0,0).

Размерности, производные от стандартных $\text{ORIGIN} := 1$

$\text{H} := \text{N}$ $\text{м} := \text{m}$ $\text{град} := \text{deg}$ $\text{кН} := 1000 \cdot \text{N}$

$\text{мм} := \text{mm}$ $\text{см} := \text{cm}$ $\text{МПа} := 10^6 \cdot \frac{\text{H}}{\text{м}^2}$

Исходные данные

(результаты испытаний образца на растяжение)

$d_0 := 4 \cdot \text{мм}$ $d_k := 2.6 \cdot \text{мм}$ $L_0 := 40 \cdot \text{мм}$ $E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$

Координаты точек диаграммы

$F := (0 \ 200 \ 200 \ 265 \ 290 \ 300 \ 270)^T \cdot \text{мм}$

$\Delta L := (0 \ 100 \ 150 \ 300 \ 500 \ 600 \ 800)^T \cdot \text{мм}$

Масштабные коэффициенты $\text{mp} := 25 \cdot \frac{\text{H}}{\text{мм}}$ $\text{mL} := 0.01$

$F := F \cdot \text{mp}$ $\Delta L := \Delta L \cdot \text{mL}$ $n := \text{rows}(F)$ число точек, снятых с диаграммы $n = 7$

$F^T = (0 \ 5 \ 5 \ 6.625 \ 7.25 \ 7.5 \ 6.75) \cdot \text{кН}$

$\Delta L^T = (0 \ 1 \ 1.5 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8) \cdot \text{мм}$

Площадь поперечного сечения образца
до испытаний после разрыва

$A_0 := \pi \cdot \frac{d_0^2}{4}$ $A_k := \pi \cdot \frac{d_k^2}{4}$ $i := 1..n$

Рис. 43П.1 Исходные данные для построения диаграммы деформирования

Исходные данные для построения диаграммы истинных напряжений приведены на рисунке 43П.1. Этот пример выполнен с учетом размерностей, поэтому в начале документа введены производные размерности. Далее исходные данные.

Координаты точек диаграммы введены в виде строки для экономии места в документе, а затем транспонированы, так как Mathcad работает только с векторами (столбцами чисел), но не со строками.

Умноженные на масштаб диаграммы координаты ее точек уже выражают нагрузку в ньютонах и абсолютное удлинение образца в метрах. Для расчета напряжений введены площади поперечного сечения образца до деформации A_0 и после разрыва в шейке A_k .

$$\Delta L_1 := \Delta L - F \cdot \frac{\Delta L_2}{F_2} + \frac{F \cdot L_0}{E \cdot A_0}$$

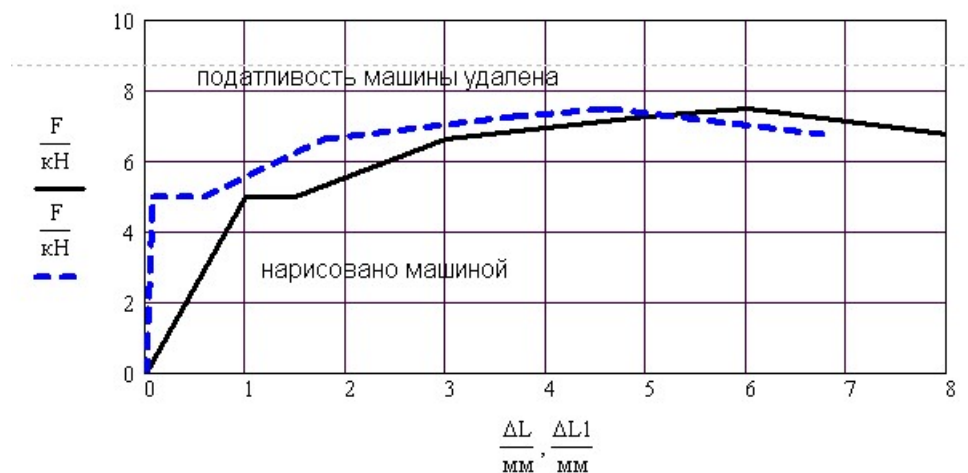


Рис. 43П.2. Учет податливости испытательной машины

На рисунке 43П.2 показан вид диаграммы деформирования, построенной машиной. Собственные упругие деформации машины, накладываясь на деформации образца, сильно искажают вид диаграммы, увеличивая ее наклон.

Для исправления диаграммы необходимо вычесть полную упругую деформацию и добавить упругую деформацию образца

$$\Delta L = \Delta L - \frac{F}{tg(\beta)} + \frac{FL_0}{EA_0},$$

где $tg(\beta) = \frac{F_T}{\Delta L_T}$ — тангенс угла наклона участка упругости на машинной диаграмме.

Ввиду малости упругих деформаций образца упругая часть исправленной диаграммы (пунктирная линия) почти совпадает с осью нагрузок.

$$\Delta L := \Delta L_1$$

Условные деформации

$$\varepsilon := \frac{\Delta L}{L_0}$$

Условные напряжения

$$\sigma := \frac{F}{A_0}$$

Истинные деформации

$$\varepsilon_{и} := \ln(1 + \varepsilon)$$

Истинные напряжения

$$\sigma_{и} := \left(\sigma \cdot e^{\varepsilon_{и}} \right)$$

В шейке образца

$$\varepsilon_{и_n} := \ln\left(\frac{A_0}{A_K}\right)$$

$$\sigma_{и_n} := \frac{F_n}{A_K}$$

Расчетные деформации и напряжения

| условные | | истинные | |
|--------------|-------------------|------------------|-----------------------|
| $\sigma_i =$ | $\varepsilon_i =$ | $\sigma_{и_i} =$ | $\varepsilon_{и_i} =$ |
| 0 МПа | 0 | 0 МПа | 0 |
| 398 | 0.002 | 399 | 0.002 |
| 398 | 0.014 | 404 | 0.014 |
| 527 | 0.045 | 551 | 0.044 |
| 577 | 0.092 | 630 | 0.088 |
| 597 | 0.115 | 666 | 0.109 |
| 537 | 0.169 | 1271 | 0.862 |

Рис.43П.3. Расчет истинных деформаций и напряжений

На рисунке 43П.3 приведен расчет условных и истинных деформаций и напряжений. Условные величины отнесены к первоначальным размерам образца A_0 и L_0 , истинные к текущим размерам A и L .

Истинные деформации определяются по формуле $\varepsilon_u = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$. Применение этой

формулы требует замера диаметра образца в процессе испытаний, что обычно не делается, поэтому она применена лишь для определения деформации в момент разрыва образца.

До образования шейки в образце используется другая формула $\varepsilon_u = \ln(1 + \varepsilon)$, не требующая замера диаметра.

Истинные напряжения определяются по формуле $\sigma_u = \sigma \cdot e^{\varepsilon_u}$, также не требующей замера диаметра. Для определения напряжений и деформаций в шейке в момент разрыва используем замеренный диаметр шейки d_k .

$$\sigma_u = \frac{F_{\text{разрыва}}}{A_k} \quad \text{и} \quad \varepsilon_u = \ln\left(\frac{A_0}{A_k}\right)$$

Результаты расчета деформаций и напряжений приведены на рисунке 43П.3, а вид диаграмм условных и истинных напряжений на рис.43П.4. Как видно из этого рисунка диаграмма истинных напряжений примерно в 5 – 7 раз длиннее и в 2 – 3 раза выше диаграммы условных напряжений.

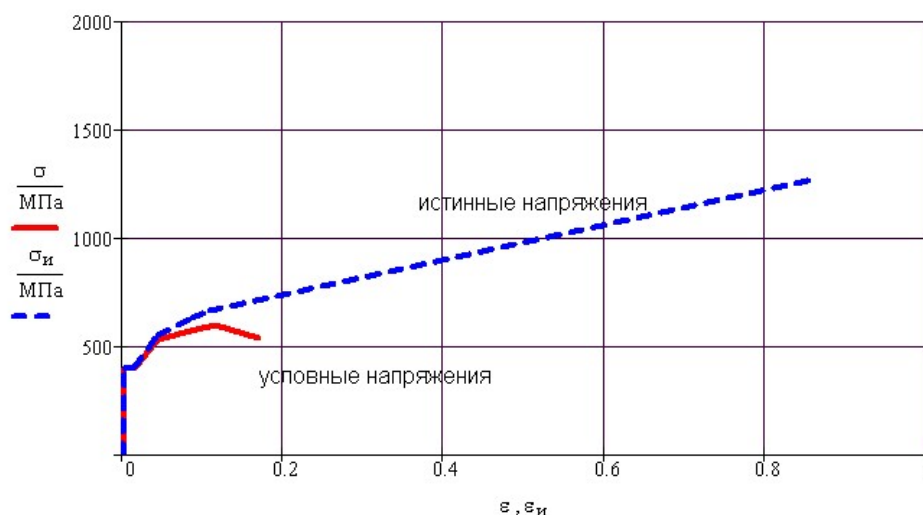


Рис. 43П.4. Сопоставление диаграмм условных и истинных напряжений

Аппроксимация диаграммы деформирования

Для расчетов на прочность и жесткость в упругопластической области необходимо знать уравнение диаграммы деформирования. Для этого необходима ее аппроксимация. Отметим три основных вида аппроксимации диаграммы деформирования (рис. 43П.5):

- Диаграмма идеального упругопластического тела (диаграмма Прандтля) с бесконечно длинной площадкой текучести

$$\text{При } \varepsilon < \varepsilon_T \quad \sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$\text{При } \varepsilon \geq \varepsilon_T \quad \sigma = \sigma_T$$

- Диаграмма упругопластического тела с линейным упрочнением

$$\text{При } \varepsilon < \varepsilon_T \quad \sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$\text{При } \varepsilon \geq \varepsilon_T \quad \sigma = \sigma_T + E_1 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_T),$$

Где E_1 — модуль упрочнения;

- Диаграмма упругопластического тела со степенным упрочнением

$$\text{При } \varepsilon < \varepsilon_T \quad \sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$\text{При } \varepsilon \geq \varepsilon_T \quad \sigma = \sigma_T + A \cdot \varepsilon^m,$$

Где A и m — эмпирические коэффициенты.

Получение уравнений для линейной и степенной аппроксимаций показано на рис. 5.6. Линейная аппроксимация заменяет рассматриваемый участок диаграммы прямой линией. Степенная аппроксимация — кривой.

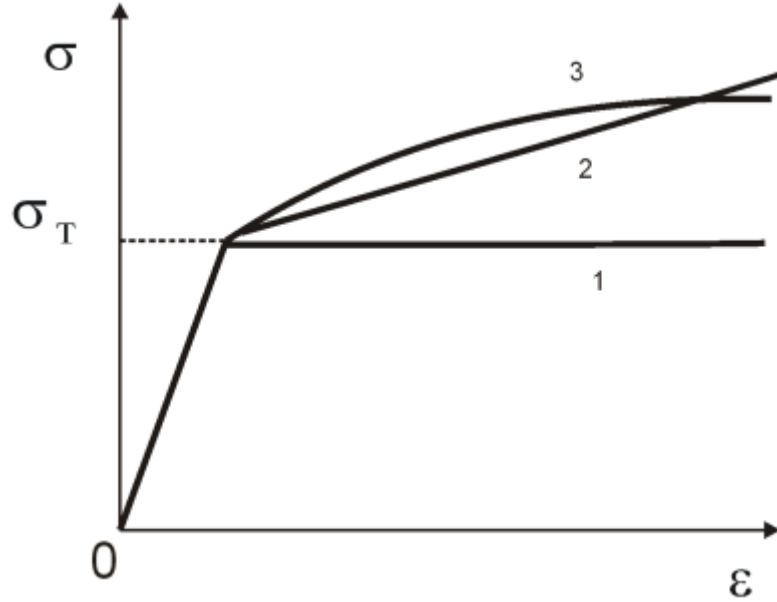


Рис. 43П.5. Аппроксимация диаграммы деформирования (1 — диаграмма Прандтля, 2 — линейное упрочнение, 3 — степенное упрочнение)

В рассматриваемом примере для расчетов в области малых упругопластических деформаций выбран участок диаграммы деформирования от предела текучести до предела прочности.

При линейной аппроксимации коэффициенты уравнения прямой линии $\sigma = a + b \cdot \varepsilon$ определяются с помощью встроенной функции регрессии **line**. При степенной аппроксимации коэффициенты уравнения $\sigma = a + b \cdot \varepsilon^c$ определяются с помощью функции **pwrfit**, требующей начального приближения коэффициентов. Наиболее удобно и просто использовать для степенной аппроксимации функцию **regress** (рис. 43П.6 внизу).

Функция **pwrfit** позволяет записать аналитическое выражение, описывающее диаграмму деформирования. Функция **regress** не дает аналитического выражения.

ВНИМАНИЕ

Функции регрессии не могут работать с размерными единицами. Чтобы сделать их безразмерными, напряжения, входящие в параметры функций, разделены на размерность.

Аппроксимация истинной диаграммы для малых деформаций (от 0 до σ_B)

$$i := 2..n-1 \quad \sigma_{1_{i-1}} := \sigma_{\varepsilon_1} \quad \varepsilon_{1_{i-1}} := \varepsilon_{\varepsilon_1}$$

Линейная аппроксимация

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \text{line} \left(\varepsilon_{1_n}, \frac{\sigma_{1_n}}{\text{МПа}} \right) \quad \sigma_{\text{лин}}(\varepsilon_1) := a + b \cdot \varepsilon_1 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 394 \\ 2633 \end{pmatrix}$$

Степенная аппроксимация

$$K := \begin{pmatrix} 100000 \\ 0.5 \\ 40 \end{pmatrix} \quad A := \text{pwrfit} \left(\varepsilon_{1_n}, \frac{\sigma_{1_n}}{\text{МПа}}, K \right) \quad A = \begin{pmatrix} 1.54 \times 10^3 \\ 0.73 \\ 368.47 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\text{степ}}(\varepsilon) := A_3 + A_1 \cdot \varepsilon^{A_2} \quad \varepsilon_1 := 0, 0.01.. \varepsilon_{n-1}$$

Аппроксимация с помощью функции **regress**
(наиболее удобна при использовании Mathcad)

$$\sigma_{\text{interp}}(\varepsilon_1) := \text{interp} \left(\text{regress} \left(\varepsilon_{1_n}, \frac{\sigma_{1_n}}{\text{МПа}}, 2 \right), \varepsilon_{1_n}, \sigma_{1_n}, \varepsilon_1 \right)$$

Рис. 43П.6. Аппроксимация диаграммы деформирования в Mathcad

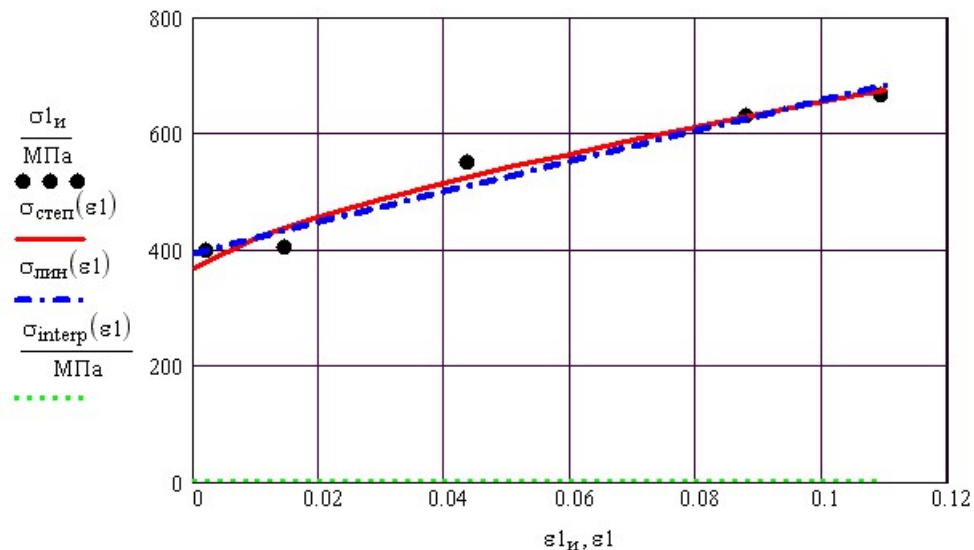


Рис. 43П.7. Линейная и степенная аппроксимации диаграммы деформирования

Результаты аппроксимации диаграммы деформирования показаны на рис. 43П.7.

В процессе расчетов в упругопластической области часто встает задача выбрать аппроксимацию диаграммы деформирования без проведения испытания материала на растяжение.

В справочниках, как правило, приводятся значения предела текучести материала и предела прочности, по которым можно приблизительно задаться аппроксимацией диаграммы деформирования.

Для линейной аппроксимации требуется знать координаты двух точек диаграммы. Напряжения σ_T и σ_B берем из справочника. Деформациями задаемся. Для предела

текучести $\epsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} \sim 0,002$. Для предела прочности берем $\epsilon_B \approx 0,1$. Это значение

очень неточное, но, как можно увидеть из расчетов, приведенных в главе 8, даже большая ошибка в уравнении диаграммы деформирования ведет к маленькой ошибке в вычислениях.

Для степенной аппроксимации диаграммы деформирования требуется минимум 3 – 4 точки. Их нет, поэтому к степенной аппроксимации лучше не обращаться. Для большинства расчетов за пределом текучести вполне достаточно линейной аппроксимации и даже диаграммы Прандтля (с бесконечно длинной площадкой текучести).

Пример 44. Расчет тонкостенной оболочки.

(Программа 44-obolochka1.mcd)

Для оболочки, состоящей из трех частей: конической, цилиндрической и сферической (рис. 44П.1), при заданных габаритных размерах и внутреннем давлении найти толщину стенки.

размерности

$$m := m \quad cm := 0.01 \cdot m \quad mm := 0.001 \cdot m$$

$$kH := 1000 \cdot N$$

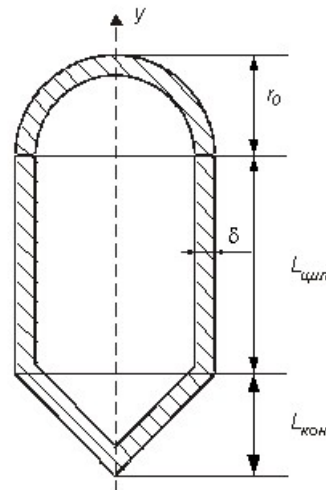
$$atm := 0.1 \cdot MPa \quad MPa := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$$

исходные данные

$$r_0 := 20 \cdot cm \quad \delta := 1 \cdot mm \quad p := 1 \cdot atm$$

$$L_{кон} := 50 \cdot cm \quad L_{цил} := 50 \cdot cm$$

$$\sigma_{доп} := 100 \cdot MPa$$



Расчет радиусов

$$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{r_0}{L_{кон}}\right)$$

$$\rho_t(y) := \frac{r(y)}{\cos(\alpha)}$$

$$r(y) := \begin{cases} r_0 \cdot \frac{y}{L_{кон}} & \text{if } y < L_{кон} \\ r_0 & \text{if } L_{кон} \leq y < L_{кон} + L_{цил} \\ \sqrt{r_0^2 - [(y - L_{кон}) - L_{цил}]^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 44.1. Схема оболочки и исходные данные к ее расчету

Расчет ведем с учетом размерностей, поэтому в начале программы приведены производные размерности.

$$\sigma_t(p, r_0, \delta, y) := \begin{cases} p \cdot \frac{\rho_t(y)}{\delta} & \text{if } y < L_{кон} \\ p \cdot \frac{r_0}{\delta} & \text{if } L_{кон} \leq y < L_{кон} + L_{цил} \\ \frac{p \cdot r_0}{2 \cdot \delta} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma_m(p, r_0, \delta, y) := \begin{cases} p \cdot \frac{\rho_t(y)}{2 \cdot \delta \cdot \cos(\alpha)} & \text{if } y < L_{кон} \\ p \cdot \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{if } L_{кон} \leq y < L_{кон} + L_{цил} \\ \frac{p \cdot r_0}{2 \cdot \delta} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$L := L_{кон} + L_{цил} + r_0 \quad L = 1.2 \cdot m \quad y := 0 \cdot cm, \frac{L}{50} \cdot L \quad \sigma_3(p, r_0, \delta, y) := \sigma_t(p, r_0, \delta, y) \text{ по 3-ей гипотезе}$$

$$\sigma_3(p, r_0, \delta, y) := \sqrt{\sigma_t(p, r_0, \delta, y)^2 + \sigma_m(p, r_0, \delta, y)^2 - \sigma_t(p, r_0, \delta, y) \cdot \sigma_m(p, r_0, \delta, y)} \text{ по 4-ой гипотезе}$$

включите выражение в рамке

Рис. 44П.2. Расчет напряжений в тонкостенной оболочке

Далее приведены исходные данные для расчета (рис. 44П.1): радиус цилиндрической части r_0 , давление p , длины цилиндрической и конической частей оболочки $L_{кон}$ и $L_{цил}$, приближенное значение толщины оболочки δ (для вывода промежуточных результатов расчетов), допускаемое напряжение $\sigma_{доп}$.

Для построения графиков напряжений найдена зависимость радиуса поперечного сечения оболочки $r(y)$ от координаты y (вдоль оси оболочки) для конической, цилиндрической и сферической частей оболочки. Найден радиус кривизны конической части $\rho_t(y)$.

При вычислении радиуса $r(y)$ сферической части подкоренное выражение взято по модулю, так как в процессе вычислений при равенстве нулю подкоренного выражения машинный нуль округляется то в положительную, то в отрицательную сторону, при этом программа выдает ошибку.

Напряжения в тонкостенной оболочке определяются по формуле Лапласа

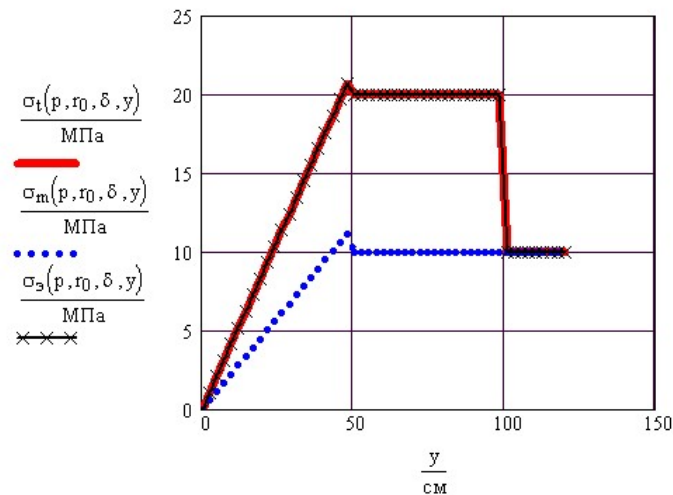
$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}$$

Выражения для тангенциальных σ_t и меридиональных напряжений σ_m , как и радиус $r(y)$ записаны в виде подпрограмм.

При записи программ с условиями надо строго следить, чтобы были определены значения функции при всех значениях аргумента, уделяя особое значение знакам $<$ и \leq .

По значениям σ_t и σ_m определяются эквивалентные напряжения по третьей или по четвертой гипотезам прочности. Выражение для эквивалентных напряжений по четвертой гипотезе в программе выключено. Включите его и посмотрите на результаты расчета.

Все выражения для напряжений записаны с четырьмя параметрами $\sigma(p, r_0, \delta, y)$. Такая форма записи делает программу расчета универсальной, позволяя определять напряжения при любых значениях этих параметров.



Определение допускаемой толщины оболочки при заданном давлении $p := 5 \text{ атм}$

$\delta := 1 \text{ мм}$ **Given** $\sigma_3(p, r_0, \delta, L_{\text{кон}}) - \sigma_{\text{доп}} = 0$ $\delta_{\text{доп}}(p, r_0) := \text{Find}(\delta)$ $\delta_{\text{доп}}(p, r_0) = 1 \text{ мм}$

Определение допускаемого давления при заданной толщине оболочки $\delta := 2 \text{ мм}$

$p := 1 \text{ атм}$ **Given** $\sigma_3(p, r_0, \delta, L_{\text{кон}}) - \sigma_{\text{доп}} = 0$ $p_{\text{доп}}(\delta, r_0) := \text{Find}(p)$ $p_{\text{доп}}(\delta, r_0) = 10 \text{ атм}$

Рис. 44П.3. Распределение напряжений вдоль оси оболочки

На рис. 44П.3 показаны графики изменения напряжений $\sigma_t, \sigma_m, \sigma_э$ по длине оболочки при заданных в начале программы значениях p, r_0, δ .

На том же рисунке внизу показано определение из условия прочности допускаемой толщины оболочки с помощью вычислительного блока **given – find**. Вычислительному блоку предшествует начальное приближение толщины δ . Варьируя исходные значения p и r_0 , можно определить допускаемую толщину оболочки $\delta_{\text{доп}}$ при любых значениях давления и радиуса оболочки.

Из условия прочности можно определить и давление p при заданных толщине δ и радиусе r_0 .

Функция **root** с подобной задачей не справилась. В силу особенностей внутреннего алгоритма этой функции она выводит результаты расчета далеко не для всех значений аргументов.

Щелкните правой кнопкой мыши на слове **find**. В контекстном меню есть возможность выбора способа решения системы уравнений: **Linear** или **Nonlinear**. Выберите любой из трех методов **Nonlinear**. Такой возможности нет при использовании функции **root**.

На рис. 44П.4 выведен трехмерный график зависимости допускаемой толщины оболочки от давления и радиуса оболочки. График построен по массиву значений, созданному функцией **CreateMech**, параметрами которой являются допускаемая толщина $\delta_{\text{доп}}$ и числовые диапазоны изменения давления p и радиуса оболочки r_0 .

Рядом с графиком выведены таблицы значений $\delta_{\text{доп}}$ для различных p и r_0 .

$$S := \text{CreateMesh}(\delta_{\text{доп}}, 0.01 \cdot \text{атм}, 5 \cdot \text{атм}, 1 \cdot \text{см}, 50 \cdot \text{см})$$


S, S

 $p := 0.1 \cdot \text{атм}, 0.2 \cdot \text{атм} \dots 4 \cdot \text{атм}$
 $p := 0.5 \cdot \text{атм}, 1 \cdot \text{атм} \dots 5 \cdot \text{атм}$
 $r_0 := 5 \cdot \text{см}, 10 \cdot \text{см} \dots 50 \cdot \text{см}$

| | |
|---------|--|
| $r_0 =$ | $\delta_{\text{доп}}(3 \cdot \text{атм}, r_0)$ |
| 5 см | 0.15 мм |
| 10 | 0.3 |
| 15 | 0.45 |
| 20 | 0.6 |
| 25 | 0.75 |
| 30 | 0.9 |
| 35 | 1.05 |
| 40 | 1.2 |
| 45 | 1.35 |
| 50 | 1.5 |

| | |
|---------|--|
| $p =$ | $\delta_{\text{доп}}(p, 50 \cdot \text{см})$ |
| 0.5 атм | 0.25 мм |
| 1 | 0.5 |
| 1.5 | 0.75 |
| 2 | 1 |
| 2.5 | 1.25 |
| 3 | 1.5 |
| 3.5 | 1.75 |
| 4 | 2 |
| 4.5 | 2.25 |
| 5 | 2.5 |

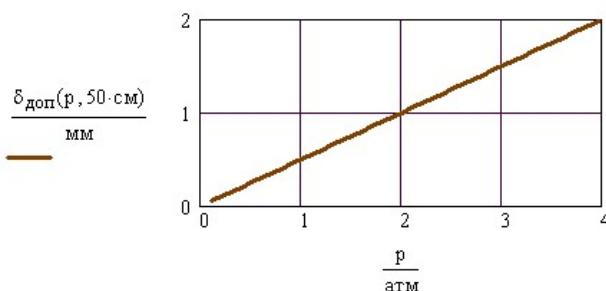


Рис. 44П.4. Результаты расчета тонкостенной оболочки

Внизу рис. 44П.4 выведен двумерный график зависимости $\delta_{\text{доп}}$ от p .

Обратите внимание на запись диапазона значений дискретной переменной с размерностью и численного аргумента с размерностью.

На рис. 44П.5 приведен расчет радиальных перемещений по формуле

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\frac{pr}{\delta} - 0.3 \frac{pr}{2\delta} \right) = \frac{\Delta r}{r}. \text{ Перемещения } \Delta_r \text{ определяются для допускаемой}$$

толщины оболочки.

Чтобы определить перемещения при иной толщине оболочки, ее надо задать выше места определения перемещений.

Определение радиального перемещения точек оболочки

 $\mu := 0.3 \quad E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} \quad p := 5 \cdot \text{атм} \quad r_0 := 20 \cdot \text{см} \quad \delta := \delta_{\text{доп}}(p, r_0)$

$$\Delta r(p, r_0, \delta, y) := \frac{r_0}{E} \cdot (\sigma_t(p, r_0, \delta, y) - \mu \cdot \sigma_m(p, r_0, \delta, y)) \quad \delta = 1 \text{ мм}$$

К построению поверхности оболочки

 $\text{fmap}(v) := \text{cyl2xyz}(v_0, v_1, v_2)$ переход к цилиндрическим координатам

$$K(y, \phi) := \begin{pmatrix} \Delta r(p, r_0, \delta, y) \cdot 10^{2.8} + r(y) \\ \phi \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{поверхность цилиндрической} \\ \text{оболочки после деформации} \end{array}$$

 $S := \text{CreateMesh}(K, 0, L, 0, 2 \cdot \pi, \text{fmap})$

$$K1(y, \phi) := \begin{pmatrix} r(y) \\ \phi \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{поверхность цилиндрической} \\ \text{оболочки до деформации} \end{array}$$

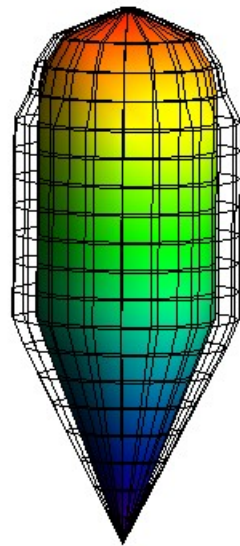
 $S1 := \text{CreateMesh}(K1, 0, L, 0, 2 \cdot \pi, \text{fmap})$

Не работает
в Mathcad 13

Рис. 44П.5. Определение радиальных перемещений оболочки

На рис. 44П.6 выведены значения рассчитанных перемещений и построен график поверхности оболочки до и после деформации. Подготовка к построению поверхности показана на рис. 44П.5. Произведен переход от прямоугольных к цилиндрическим координатам с помощью встроенной функции **cyl2xyz**, которая входит параметром в функцию **CreateMech**, создающую массив значений для построения поверхности. Параметрами функции **CreateMech** являются K — функция полярных координат поверхности, пределы изменения координат по углу и по по оси оболочки, функция преобразования координат **fmap**.

Промежуточная функция $K(y, \theta)$ задает вектор координат точек поверхности (сверху вниз: вдоль радиуса, по углу, по оси оболочки).



| y = | |
|-----|----|
| 0 | см |
| 12 | |
| 24 | |
| 36 | |
| 48 | |
| 60 | |
| 72 | |
| 84 | |
| 96 | |
| 108 | |
| 120 | |

| $\Delta r(p, r_0, \delta, y) =$ | |
|---------------------------------|----|
| 0 | мм |
| 0.021673 | |
| 0.043346 | |
| 0.065018 | |
| 0.086691 | |
| 0.085 | |
| 0.085 | |
| 0.085 | |
| 0.085 | |
| 0.035 | |
| 0.035 | |

Расчет распорного кольца

$$q := \sigma_m(p, r_0, \delta, L_{\text{цил}}) \cdot \delta \cdot \sin(\alpha) \quad q = 18.57 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

$$A_{\text{кольца}} := \frac{q \cdot r_0}{\sigma_{\text{доп}}} \quad A_{\text{кольца}} = 0.371 \text{ см}^2$$

Рис. 44П.6. Вид оболочки до и после деформации

Поскольку радиальные перемещения оболочки малы, для наглядности они увеличены с помощью масштабного коэффициента $10^{2.8}$. Такая форма записи масштабного коэффициента очень удобна. Она позволяет, меняя показатель степени, быстро менять масштаб графика.

В заключение расчета определена площадь распорного кольца для разгрузки оболочки от изгибающего момента, в месте перехода от конической к цилиндрической части оболочки.

Получилась элегантная и универсальная программа для расчета любой тонкостенной оболочки. Для оболочки, составленной из других элементов, внесите соответствующие изменения в подпрограммы определения напряжений и радиусов кривизны на рис.44П.1 и 44П.2.

Пример 45. Оптимизация расчета кронштейна.

(Программа 45-optimiz1.mcd)

На рис.45П.1 показан кронштейн из двух шарнирно соединенных стержней. Углы наклона стержней α_1 и α_2 . Через блок перекинут трос. Углы наклона троса: $\beta_1 = 180^\circ$ (груз висит вертикально) и β_2 — переменный. Требуется определить:

1. Площади сечений стержней из условия прочности $\sigma_1 = \sigma_2 = [\sigma]$
2. Углы наклона стержней α_1 и α_2 из условия равенства напряжений в стержнях
3. Углы α_2 и β_2 из условия минимального веса кронштейна

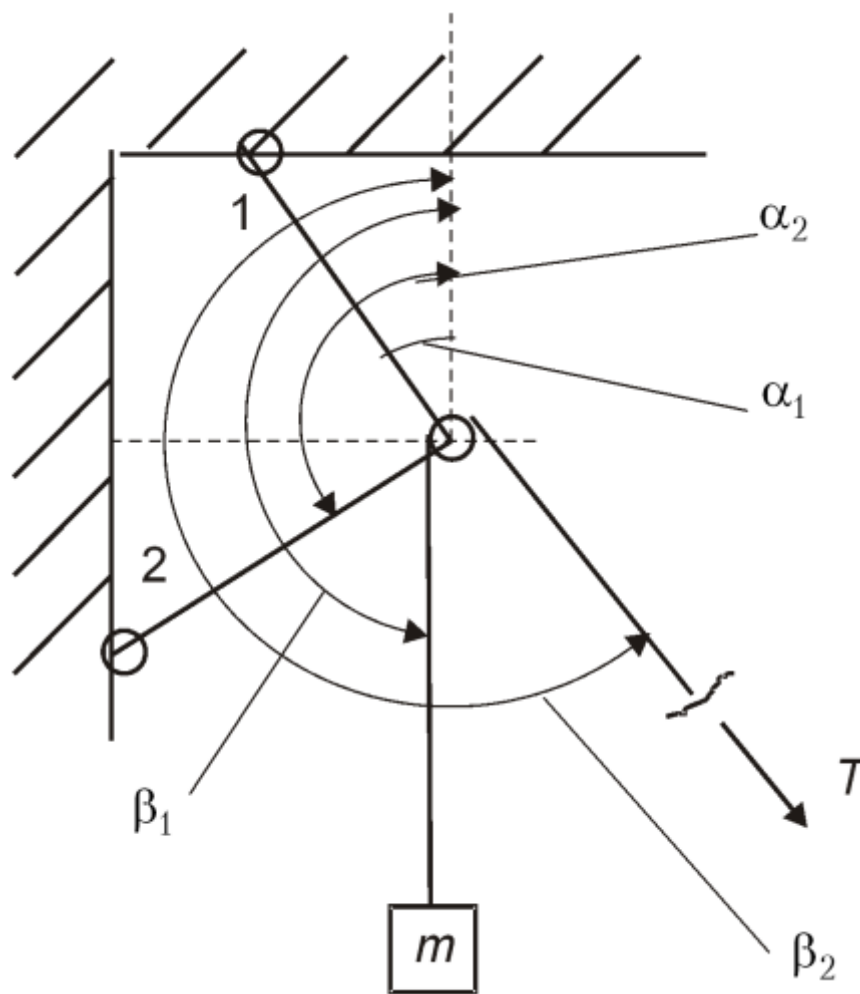


Рис.45П.1. Расчетная схема кронштейна

Фактически здесь рассматривается три самостоятельных расчета со своими исходными данными.

$$\begin{aligned}
 \text{м} &:= \text{м} & \text{см} &:= 0.01 \cdot \text{м} & \text{мм} &:= 0.001 \cdot \text{м} & \text{МПа} &:= 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \\
 \text{Н} &:= \text{Н} & \text{кН} &:= 1000 \cdot \text{Н} & \text{кг} &:= \text{кг} & \text{град} &:= \text{deg}
 \end{aligned}$$

Подбор площадей сечений при заданных углах

Исходные данные

$$\begin{aligned}
 T &:= 10 \cdot \text{кН} & \sigma_{\text{доп}} &:= 100 \cdot \text{МПа} & \rho &:= 8000 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \\
 \alpha_1 &:= 30 \cdot \text{град} & \alpha_2 &:= 120 \cdot \text{град} & \beta_1 &:= 180 \cdot \text{град} & \beta_2 &:= 210 \cdot \text{град} \\
 N_1 &:= 10 \cdot \text{кН} & N_2 &:= 10 \cdot \text{кН} & \text{Given} \\
 N_1 \cdot \cos(\alpha_1) + N_2 \cdot \cos(\alpha_2) + T \cdot (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2)) &= 0 \\
 N_1 \cdot \sin(\alpha_1) + N_2 \cdot \sin(\alpha_2) + T \cdot (\sin(\beta_1) + \sin(\beta_2)) &= 0 \\
 Z &:= \text{Find}(N_1, N_2) \\
 N_1 &:= Z_0 & A_1 &:= \frac{|N_1|}{\sigma_{\text{доп}}} & A_1 &= 1.866 \text{ см}^2 \\
 N_2 &:= Z_1 & A_2 &:= \frac{|N_2|}{\sigma_{\text{доп}}} & A_2 &= 0.5 \text{ см}^2
 \end{aligned}$$

Рис.45П.2. Подбор площадей сечений из условия прочности

В начале программы введены производные размерности. Затем решается первая задача: подбор площади сечений стержней из условия прочности (рис. 45П.2).

Все углы наклона заданы. С помощью вычислительного блока **Given-Find** из условий равновесия определяются продольные усилия N_1 и N_2 в стержнях. Затем из условия прочности определяются площади сечений стержней.

Вторая задача: подобрать углы наклона стержней из условия равнопрочности стержней (рис. 45П.3). На этот раз заданы углы наклона троса и диаметр стержней. С помощью вычислительного блока **Given-Find** из условий равновесия определяются углы наклона стержней и продольные усилия N_1 и N_2 в стержнях. Дополнительно в вычислительный блок включены равенство усилий в стержнях (один стержень растянут, другой сжат) и условие прочности.

Подбор углов наклона стержней α_1 и α_2 из условия равенства напряжений в стержнях

Исходные данные

$$\begin{aligned}
 T &:= 10 \cdot \text{кН} & \sigma_{\text{доп}} &:= 100 \cdot \text{МПа} & d &:= 2 \cdot \text{см} & A &:= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \\
 \beta_1 &:= 180 \cdot \text{град} & \beta_2 &:= 210 \cdot \text{град} & A &= 3.142 \text{ см}^2 \\
 \alpha_1 &:= 30 \cdot \text{град} & \alpha_2 &:= 120 \cdot \text{град} & \text{Given} \\
 N_1 \cdot \cos(\alpha_1) + N_2 \cdot \cos(\alpha_2) + T \cdot (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2)) &= 0 \\
 N_1 \cdot \sin(\alpha_1) + N_2 \cdot \sin(\alpha_2) + T \cdot (\sin(\beta_1) + \sin(\beta_2)) &= 0 \\
 N_1 &= -N_2 & N_1 &= \sigma_{\text{доп}} \cdot A & \text{Для проверки выведены} \\
 & & & & N_1 \text{ и } N_2 \text{ Их можно убрать} \\
 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} &:= \text{Find}\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{N_1}{\text{кН}}, \frac{N_2}{\text{кН}}\right) & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1.52 \\ 2.145 \\ 31.416 \\ -31.416 \end{pmatrix} & \alpha_1 &= 87.094 \text{ град} \\
 & & & & \alpha_2 &= 122.906 \text{ град}
 \end{aligned}$$

Размерности выравнены, так как все величины в массивах должны иметь одинаковую размерность

Рис.45П.3. Определение углов наклона стержней из условия $N_1 = -N_2$

**Поиск углов α_2 и β_2 , при которых
масса кронштейна минимальна
Исходные данные**

$$L1 := 2 \cdot \text{м} \quad L2 := 3 \cdot \text{м} \quad T := 10 \cdot \text{кН} \quad \sigma_{\text{доп}} := 100 \cdot \text{МПа}$$

$$\alpha_1 := 30 \cdot \text{град} \quad \beta_1 := 180 \cdot \text{град} \quad \rho := 8000 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Определение продольных усилий

$$N1 := 10 \cdot \text{кН} \quad N2 := 10 \cdot \text{кН} \quad \text{Given}$$

$$N1 \cdot \cos(\alpha_1) + N2 \cdot \cos(\alpha_2) + T \cdot (\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2)) = 0$$

$$N1 \cdot \sin(\alpha_1) + N2 \cdot \sin(\alpha_2) + T \cdot (\sin(\beta_1) + \sin(\beta_2)) = 0$$

$$Z(\alpha_2, \beta_2) := \text{Minerr}(N1, N2)$$

$$N1(\alpha_2, \beta_2) := Z(\alpha_2, \beta_2)_0 \quad A1(\alpha_2, \beta_2) := \frac{|N1(\alpha_2, \beta_2)|}{\sigma_{\text{доп}}}$$

$$N2(\alpha_2, \beta_2) := Z(\alpha_2, \beta_2)_1 \quad A2(\alpha_2, \beta_2) := \frac{|N2(\alpha_2, \beta_2)|}{\sigma_{\text{доп}}}$$

масса кронштейна

$$m(\alpha_2, \beta_2) := \rho \cdot (A1(\alpha_2, \beta_2) \cdot L1 + A2(\alpha_2, \beta_2) \cdot L2)$$

$$\text{Given} \quad 90 \cdot \text{град} < \alpha_2 < 180 \cdot \text{град} \quad 180 \cdot \text{град} < \beta_2 < 270 \cdot \text{град}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} := \text{Minimize}(m, \alpha_2, \beta_2) \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \\ 240 \end{pmatrix} \text{град}$$

$$m(\alpha_2, \beta_2) = 2.8 \cdot \text{кг} \quad A1(\alpha_2, \beta_2) = 1.732 \cdot \text{см}^2 \quad A2(\alpha_2, \beta_2) = 0 \cdot \text{см}^2$$

Рис.45П.4. Определение углов α_2 и β_2 из условия минимальной массы кронштейна

Третья задача: Заданы два угла (любые). Найти другие два угла из условия минимальной массы кронштейна (рис. 45П.4).

С помощью вычислительного блока **given-find** определяются продольные усилия $N1$ и $N2$ в стержнях, площади сечений стержней $A1$ и $A2$ (из условия прочности) и масса кронштейна $m = \sum \rho \cdot A \cdot L$. Переменные углы α_2 и β_2

записываются в параметры всех функций, которые должны изменяться в процессе поиска экстремума. Для отыскания экстремума функции используется вычислительный блок **given** с функцией **minimize** для отыскания минимума или с функцией **maximize** для отыскания максимума. В качестве параметров этих функций используются имя целевой функции (без параметров) и переменные поиска.

При наличии ограничений на поиск наличие ключевого слова **given** обязательно. При отсутствии ограничений слово **given** можно опустить.

Как и всегда при использовании вычислительного блока со словом **given** перед ним задаются начальные приближения всех переменных.

Количество переменных поиска может быть любым. Но учтите, что время поиска экстремума возрастает многократно при введении каждой новой переменной. На практике можно использовать 1 – 3 переменные. Если вы не спешите и в состоянии подождать окончания поиска, можно включить и больше переменных. Особенно велико время поиска, если при вычислении целевой функции используются интегралы, например, интеграл Мора.

В нашей задаче функция **Minimize** выводит оптимальные углы, с учетом которых определены масса кронштейна и площади сечения стержней.

Проанализируем результаты поиска для рассмотренной стержневой системы. В результате поиска получили, что площадь второго стержня равна нулю. Как бы мы не меняли переменные поиска, все равно оптимальная площадь второго стержня остается равной нулю.

Спасибо компьютеру за разумную подсказку. Оптимальное решение (наименьший вес кронштейна) соответствует случаю, когда вектор геометрической суммы двух усилий T направлен вдоль стержня 1. Тогда второй стержень остается ненагруженным (ненужным). Действительно, самая разумная подвеска блока на одном шарнирно закрепленном стержне.

Пример 46. Оптимальный расчет сферической крышки.

(Программа 46-optimize2.mcd)

Сосуд высокого давления герметично закрыт сферической крышкой (рис. 46П.1). Давление в сосуде p , диаметр сосуда $2r_0$, толщина крышки δ неизвестна, но должна удовлетворять условию прочности. Требуется определить радиус кривизны крышки R , при котором масса крышки $m(R)$ будет минимальной.

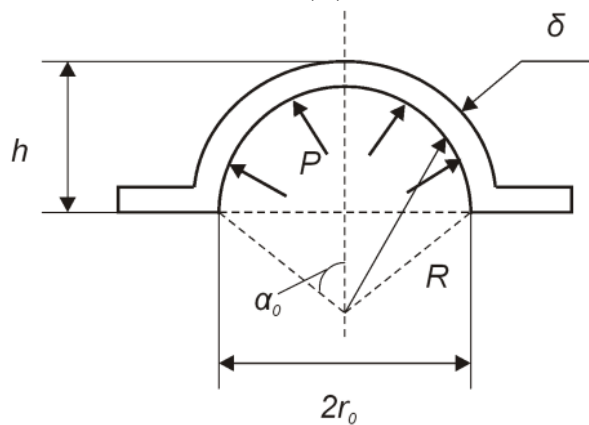


Рис. 46П.1. Расчетная схема сферической крышки

Расчет крышки приведен на рис. 46П.2. Масса крышки $m(R) = \rho S(R)\delta(R)$. В задаче, задаваясь радиусом кривизны крышки R , найдем последовательно толщину крышки $\delta(R)$ из условия прочности тонкостенной оболочки, высоту крышки $H(R)$, площадь поверхности крышки $S(R)$ и массу крышки $m(R)$.

Минимальную массу крышки находим с помощью функции **minimize**. Поскольку никаких ограничений на массу крышки не накладывается, ключевое слово **given** писать необязательно. Требуется записать только начальное приближение R и функцию **minimize**. Следует отметить, что оптимальное значение радиуса кривизны крышки RR не зависит от давления p .

Исходные данные

$$p := 1 \text{ МПа} \quad \sigma_{\text{доп}} := 100 \text{ МПа} \quad r_0 := 10 \text{ см} \quad \rho := 7800 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

по формуле Лапласа Из геометрии крышки

$$\delta(R) := \frac{p \cdot R}{\sigma_{\text{доп}}} \quad \alpha(R) := \arcsin\left(\frac{r_0}{R}\right) \quad h(R) := R - R \cdot \cos(\alpha(R))$$

$$S(R) := \pi \cdot (h(R)^2 + 2 \cdot r_0^2) \quad m(R) := \rho \cdot S(R) \cdot \delta(R) \text{ масса крышки}$$

Поиск радиуса крышки, соответствующего минимальной массе крышки

$$R := 50 \text{ см} \quad RR := \text{Minimize}(m, R) \quad RR = 10.8 \text{ см}$$

$$m(RR) = 0.65 \text{ кг} \quad h(RR) = 6.8 \text{ см} \quad R := r_0, r_0 + \frac{r_0}{20} \dots 2 \cdot r_0$$

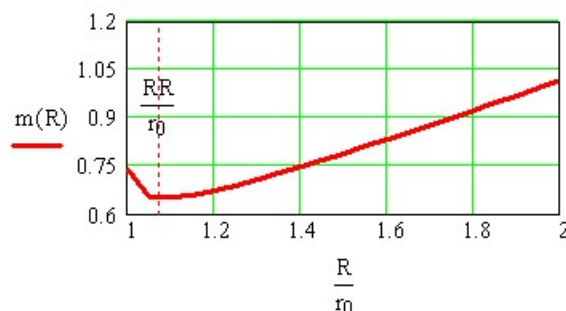


Рис. 46П.2. Расчет сферической крышки

На рис. 46П.2 показана зависимость массы крышки от относительного радиуса кривизны крышки R/r_0 . На графике хорошо виден минимум функции.

Пример 47. Подбор нагрузок по перемещениям балки.

(Программа 47-optimize3.mcd)

Рассмотрим пример обратной задачи оптимального проектирования.

Для консольной балки прямоугольного сечения (рис. 47П.1) заданы перемещения в трех точках после деформации $\Delta_{M_0} = 2$ мм, $\Delta_{F_1} = -1$ мм, $\Delta_{F_2} = 1$ мм. Требуется подобрать нагрузки, действие которых на балку вызовет появление заданных перемещений.

Характером нагрузок задаемся: приложим пару сил на свободном конце, и две силы в точках, где заданы перемещения. При тех же граничных условиях нагрузки можно задать любые и в любой точке, но с учетом здравого смысла. Ведь можно выбрать такие нагрузки, которые не могут создать заданный профиль упругой оси.

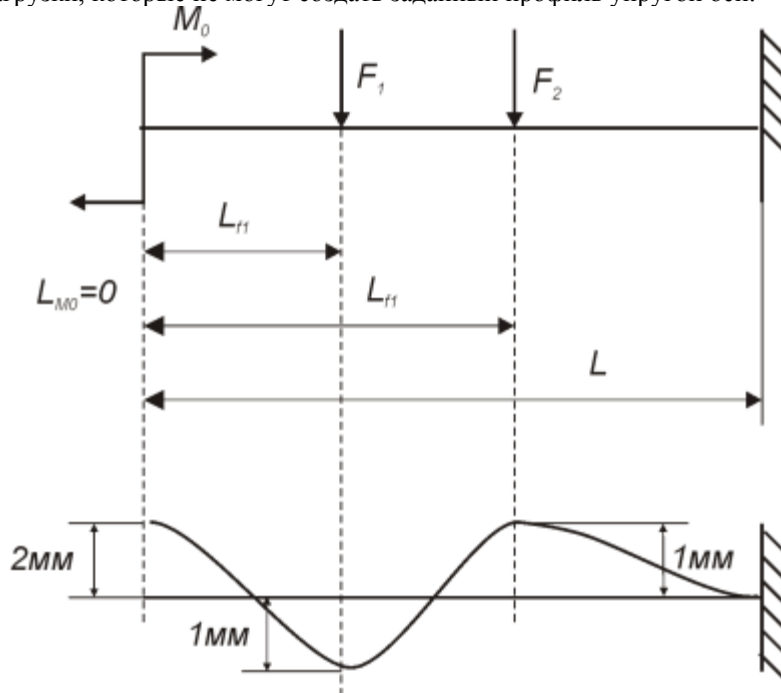


Рис. 47П.1. Расчетная схема балки и заданные перемещения в ней

Размерности, производные от стандартных ORIGIN := 1

кН := 1000·N мм := mm см := cm Нм := N·m МПа := $10^6 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Исходные данные

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$ $b := 1 \cdot \text{см}$ $h := 2 \cdot \text{см}$ $J(x) := \frac{b \cdot h^3}{12}$

$L_{M0} := 0 \cdot \text{см}$ $L_{F1} := 20 \cdot \text{см}$ $L_{F2} := 60 \cdot \text{см}$ $L := 100 \cdot \text{см}$

Расчет перемещений с помощью интеграла Мора

$M(F1, F2, M0, x) := M0 \cdot (x > L_{M0}) + F1 \cdot (x - L_{F1}) \cdot (x > L_{F1}) + F2 \cdot (x - L_{F2}) \cdot (x > L_{F2})$

$M1(x, x) := 1 \cdot (x - x) \cdot (x > x)$

$\Delta(F1, F2, M0, x) := \int_0^L \frac{M(F1, F2, M0, x) \cdot M1(x, x)}{E \cdot J(x)} dx$ $x := 0 \cdot \text{см}, \frac{L}{100} \dots L$

$M0 := 100 \cdot \text{Нм}$ $F1 := 1 \cdot \text{кН}$ $F2 := -3 \cdot \text{кН}$ $\theta(F1, F2, M0, x) := \frac{d}{dx} \Delta(F1, F2, M0, x)$

Поиск нагрузок удовлетворяющих граничным условиям

Given $\Delta(F1, F2, M0, L_{M0}) = 2 \cdot \text{мм}$ $\Delta(F1, F2, M0, L_{F1}) = -1 \cdot \text{мм}$

$\Delta(F1, F2, M0, L_{F2}) = 1 \cdot \text{мм}$ $\Delta(F1, F2, M0, L) = 0 \cdot \text{мм}$ $\theta(F1, F2, M0, L) = 0$

$\begin{pmatrix} F1 \\ F2 \\ M0 \end{pmatrix} := \text{Minerr}(F1, F2, M0)$ $F1 = -1 \cdot \text{кН}$ $F2 = 1 \cdot \text{кН}$ $M0 = 140 \cdot \text{Нм}$

Рис. 47П.2. Расчет нагрузок, вызывающих заданные перемещения в балке

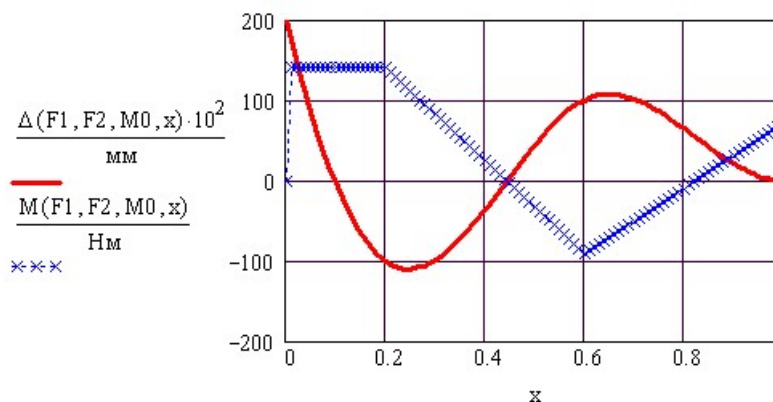


Рис. 47П.3. Эпюра изгибающих моментов и перемещения в балке

На рис. 47П.2 приведено решение этой задачи. Вверху введены исходные данные для расчета. Далее в общем виде записан изгибающий момент в сечениях балки. Поскольку нагрузки на балку не известны, они включены в параметры функции изгибающего момента. В общем виде записан также интеграл Мора для определения перемещений в произвольной точке балки.

Нагрузки, удовлетворяющие заданным граничным условиям, определяются путем решения системы уравнений граничных условий с помощью вычислительного блока [given-find](#). Правда, на этот раз вместо функции [find](#) взята функция [minerr](#).

Если решение существует, результаты решения задачи с использованием функций [find](#) и [miner](#) совпадают. Если решения нет функция [find](#) выдает ошибку, а функция [minerr](#) выводит невязку решения.

Равенство нулю угла поворота сечения в заделке нельзя ввести в вычислительный блок в виде производной от прогиба, поэтому выше вычислительного блока производной присвоено имя функции θ с теми же параметрами.

Вычислительному блоку предшествуют начальные приближения всех параметров (нагрузок). После вычислительного блока выведены значения нагрузок, удовлетворяющих решению системы уравнений (граничным условиям задачи).

На рис. 47П.3 показаны изогнутая ось балки и эпюра изгибающих моментов от найденных нагрузок.

Пример 48. Аппроксимация упругой линии балки степенным полиномом.

(Программа 48-optimize4.mcd)

В этом примере рассматривается второй вариант решения предыдущей задачи (пример 47).

Для консольной балки прямоугольного сечения (рис. 48П.1, слева) заданы граничные условия. Надо подобрать нагрузки, удовлетворяющие этим условиям. В этой задаче расчет ведется без учета размерностей. Числовые исходные данные введены в **кг** и **см**.

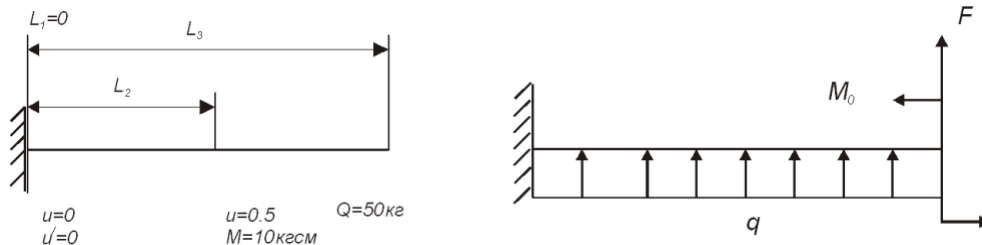


Рис. 48П.1. Схема балки с указанием граничных условий (слева) и найденные нагрузки (справа)

Подберем степенной полином, удовлетворяющий заданным граничным условиям. На рис. 48П.2 для заданной балки подбирается полином четвертой степени. Для решения системы уравнений граничных условий производные от перемещения u готовятся заранее в виде функций от коэффициентов полинома.

В этой задаче заданы равенство нулю прогиба и угла поворота в заделке $L_1 = 0$, прогиб $\Delta = 0,5$ см, изгибающий момент $M = 10$ кгсм в сечении $L_2 = 50$ см и поперечная сила $Q = 50$ кг на свободном конце балки $L_3 = 100$ см. В принципе можно задать любые граничные условия.

Далее с помощью вычислительного блока **given-find** определяются коэффициенты полинома. Зная коэффициенты полинома теперь его можно записать в явном виде.

Исходные данные

$$E := 2 \cdot 10^6 \quad b := 1 \quad h := 2 \quad J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Имеем 4 граничных условия. **Берем полином 4-й степени**

$$i := 1..m+1 \quad u(x, C) := \sum_{i=1}^{m+1} C_i \cdot x^{i-1}$$

подготовка производных к подстановке в вычислительный блок

$$u1(x, C) := \frac{d}{dx} u(x, C) \quad M(x, C) := \frac{d^2}{dx^2} u(x, C) \cdot E \cdot J$$

$$Q(x, C) := \frac{d^3}{dx^3} u(x, C) \cdot E \cdot J \quad q(x, C) := \frac{d^4}{dx^4} u(x, C) \cdot E \cdot J$$

Определение коэффициентов полинома

$C_i := 10$ начальные приближения коэффициентов

$$\text{Given} \quad u(L_1, C) = 0 \quad M(L_2, C) = 10 \quad Q(L_3, C) = -50$$

$$u1(L_1, C) = 0 \quad u(L_2, C) = 0.5$$

$CC := \text{Find}(C)$ использован нелинейный метод

аналитический вид упругой линии

$$f(x) := \sum_{i=1}^{m+1} CC_i \cdot x^{i-1} \quad CC = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ 0.00024 \\ -0 \\ -0 \end{pmatrix}$$

Рис. 48П.2. Подбор степенного полинома при решении обратных задач

$$x := 0, \frac{L_3}{20} \dots L_3$$

поменяйте степень полинома **m** и положение точек **L**, где заданы перемещения

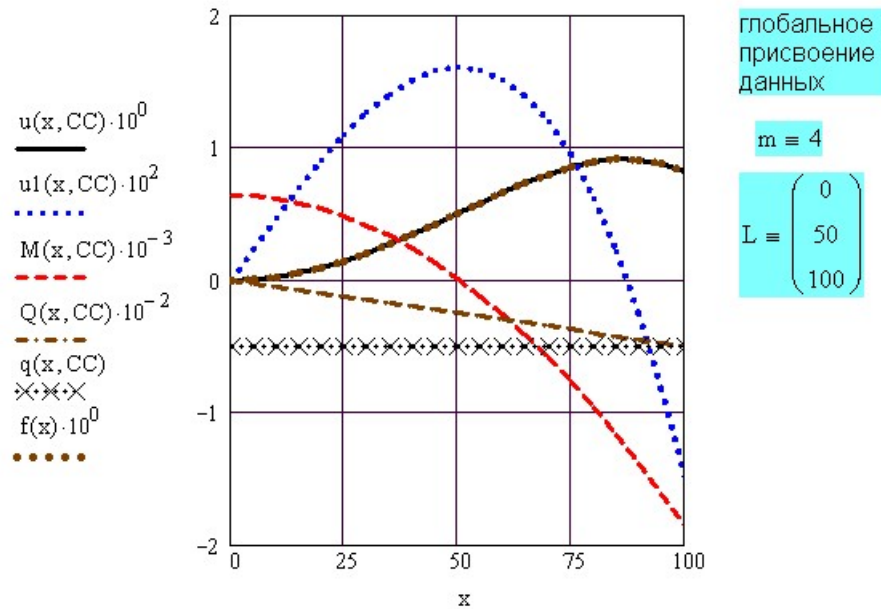


Рис.48П.3. Графики, построенные с использованием найденного полинома

По уравнению полинома строятся графики перемещения и его производных (рис. 48П.3), то есть углов поворота, поперечной силы и изгибающего момента. Анализируя эти графики можно определить величины нагрузок на балку, вызывающих подобный вид упругой линии балки. Но это будут нагрузки, приложенные к свободному концу балки (рис. 48П.1, справа). В нашем примере $q = 0,5$ кг/см, $F=50$ кг, $M_0=180$ кгсм. Способ, описанный в предыдущей задаче, предпочтительней. Он позволяют определять произвольно приложенные нагрузки.

Пример 49. Поиск оптимальных размеров сечения балки.

(Программа 49-optimize5.mcd)

Рассмотрим совсем простой случай нагружения балки. Консольная балка прямоугольного сечения, нагруженная одной силой на свободном конце (рис. 49П.1). Требуется подобрать размеры сечения балки из условий, что $\sigma_{\max} = [\sigma]$ и перемещение конца балки $\Delta \leq [\Delta] = 2$ мм. На размеры сечения тоже наложены ограничения. Расчет оптимальных размеров сечения показан на рис. 49П.2. Формулы для напряжения и перемещения конца балки записаны готовыми ввиду простоты расчета. Масса стержня пропорциональна площади поперечного сечения. Размеры сечения определяются с использованием вычислительного блока **given – minimize**. Внутри блока записаны сразу 4 ограничения: на размеры b и h , напряжение σ и перемещение Δ . Оптимальные размеры выведены после функции **minimize**.

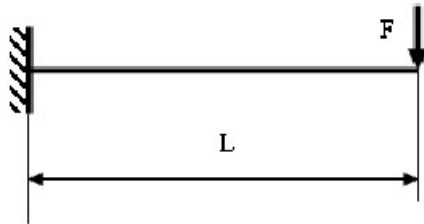


Рис.49П.1. Расчетная схема балки

Исходные данные

$$L := 1 \cdot \text{м} \quad F := 200 \cdot \text{Н} \quad b := 3 \cdot \text{см} \quad h := 2 \cdot \text{см}$$

$$\sigma_{\text{доп}} := 100 \cdot \text{МПа} \quad \Delta_{\text{доп}} := 20 \cdot \text{мм} \quad \text{Поменяйте допустимое перемещение}$$

Расчетные формулы

$$A(b, h) := b \cdot h \quad \sigma(b, h) := \frac{6 \cdot F \cdot L}{b \cdot h^2} \quad \Delta(b, h) := \frac{4 \cdot F \cdot L^3}{E \cdot b \cdot h^3}$$

Поиск оптимального решения

$$\text{Given} \quad 2 \cdot \text{см} < b < 6 \cdot \text{см} \quad 1 \cdot \text{см} < h < 10 \cdot \text{см} \quad \text{Поменяйте ограничения}$$

$$\sigma(b, h) < \sigma_{\text{доп}} \quad \Delta(b, h) < \Delta_{\text{доп}}$$

$$Z := \text{Minimize}(A, b, h) \quad Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.449 \end{pmatrix} \text{ см} \quad b_{\text{опт}} := Z_0 \quad h_{\text{опт}} := Z_1$$

$$\Delta(b_{\text{опт}}, h_{\text{опт}}) = 13.608 \text{ мм} \quad \sigma(b_{\text{опт}}, h_{\text{опт}}) = 100 \text{ МПа}$$

Оптимальные размеры сечения балки

$$b_{\text{опт}} = 20 \text{ мм} \quad h_{\text{опт}} = 24.5 \text{ мм} \quad A(b_{\text{опт}}, h_{\text{опт}}) = 4.9 \text{ см}^2$$

$$\Delta(b_{\text{опт}}, h_{\text{опт}}) = 0.014 \text{ м} \quad \sigma(b_{\text{опт}}, h_{\text{опт}}) = 100 \text{ МПа}$$

Сравнение перемещения и напряжения в оптимальной конструкции с допустимыми

$$\Delta 1(b, h) := \frac{\Delta(b, h)}{\Delta_{\text{доп}}} \quad \sigma 1(b, h) := \frac{\sigma(b, h)}{\sigma_{\text{доп}}}$$

$$\Delta 1(b_{\text{опт}}, h_{\text{опт}}) = 0.68 \quad \sigma 1(b_{\text{опт}}, h_{\text{опт}}) = 1$$

Рис. 49П.2. Зависимость максимального напряжения и перемещения конца балки от размеров сечения

Этот пример прост (для Mathcad) и нагляден. Поиск идет сразу по нескольким переменным с учетом большого количества ограничений. Экстремума в данной задаче нет, поэтому в области наложенных ограничений Mathcad выбирает наилучшее решение.

Пример 50. Динамический расчет балки матричным методом перемещений

(Программа 50-МКЭ-1-балка.mcd)

Расчет балки примитивно прост, если надо определить лишь одну первую собственную частоту. Для определения спектра собственных частот и получения формы колебаний необходимо использовать метод конечных элементов. Простейшим вариантом этого метода и является матричный метод перемещений.

Целью расчета является определение вектора собственных частот балки. В примере 36 балка рассматривалась, как система с одной степенью свободы, и соответственно определена была только одна собственная частота (первая).

Для определения вектора собственных частот надо рассмотреть балку, как систему с несколькими степенями свободы.

Статический расчет балки

Поясним суть матричного метода.

1. Заданная стержневая система (в нашем случае балка) разбивается на элементы — стержни.
2. Для каждого элемента составляется основное уравнение матричного метода, представляющее собой закон Гука в обобщенном виде $F = K \cdot \Delta$, где F — вектор сил, Δ — вектор перемещений, K — матрица жесткости.
3. Уравнения для отдельных элементов объединяются в единую систему уравнений, решение которой дает вектор узловых перемещений стержневой системы.
4. Зная узловые перемещения системы, можно определить внутренние усилия в стержнях, напряжения, собственные частоты и т. д.

На рисунке 50П.1 показано разбиение заданной балки на элементы — стержни. На рис. 50П.2 — исходные данные к расчету.

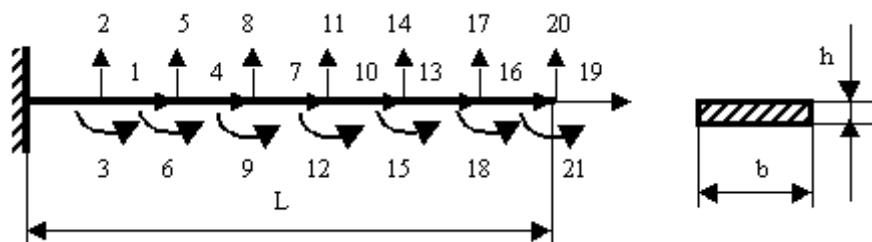


Рис. 50П.1. Расчетная схема балки

В примерах 50, 51, 52 расчет ведется без учета размерностей, так как элементы матриц в этих примерах имеют разные размерности. Mathcad считает это недопустимым.

Плоский стержневой элемент, показанный на рис. 50П.2, имеет 6 степеней свободы (узловых перемещений). Соответственно в уравнении $F = K \cdot \Delta$ векторы сил F и перемещений Δ содержат по 6 элементов. Матрица жесткости K — стандартная размерностью 6×6 — приведена на рис. 50П.3.

число перемещений $n := \max(MI)$

число элементов $N := \text{rows}(MI)$

$n = 21$ $N = 7$

номер элемента $k := 1..N$

номер перемещения $i := 1..n$

Свойства оргстекла (материала балки)

$\rho_k := 1180$ плотность $E_k := 5.25 \cdot 10^9$

$G := 0.4 \cdot E$

размеры балки

$b := 0.03$ $h := 0.0042$ $L := 0.7$ Все элементы балки одинаковых размеров

моменты инерции $J_k := \frac{b \cdot h^3}{12}$

длины элементов $LL_k := \frac{L}{N}$

площади сечений $A_k := b \cdot h$

углы наклона оси элементов $\alpha_k := 0$

силы $F_1 := 0$ $F_{20} := 1$

масса элементов $m := \rho \cdot A \cdot LL$

матрица индексов

$$MI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

стержневой элемент с шестью степенями свободы

Рис. 50П.2 Исходные данные к расчету

матрица направляющих косинусов

$$L_k := \begin{pmatrix} \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица жесткости элемента

$$KE_k := \begin{pmatrix} \frac{E_k A_k}{LL_k} & 0 & 0 & -\frac{E_k A_k}{LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E_k J_k}{(LL_k)^3} & \frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} & 0 & -\frac{12 E_k J_k}{(LL_k)^3} & \frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} \\ 0 & \frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} & \frac{4 E_k J_k}{LL_k} & 0 & -\frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} & \frac{2 E_k J_k}{LL_k} \\ -\frac{E_k A_k}{LL_k} & 0 & 0 & \frac{E_k A_k}{LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 E_k J_k}{(LL_k)^3} & -\frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} & 0 & \frac{12 E_k J_k}{(LL_k)^3} & -\frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} \\ 0 & \frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} & \frac{2 E_k J_k}{LL_k} & 0 & -\frac{6 E_k J_k}{(LL_k)^2} & \frac{4 E_k J_k}{LL_k} \end{pmatrix}$$

матрица масс элемента

$$M_k := m_k \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11 LL_k}{210} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13 LL_k}{420} \\ 0 & \frac{11 LL_k}{210} & \frac{(LL_k)^2}{105} & 0 & \frac{13 LL_k}{420} & -\frac{(LL_k)^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13 LL_k}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11 LL_k}{210} \\ 0 & -\frac{13 LL_k}{420} & -\frac{(LL_k)^2}{140} & 0 & -\frac{11 LL_k}{210} & \frac{(LL_k)^2}{105} \end{pmatrix}$$

Рис. 50П.3. Стандартные матрицы для плоского стержневого элемента

В матричном методе используются 2 системы координат: локальная и глобальная. Локальная система — своя для каждого элемента. Ось x направлена вдоль оси стержня. Начало локальной нумерации в начале координат. Глобальная система — единая для всей стержневой системы. Выбор начала глобальных координат и направление осей произвольные. Связь между этими системами координат описывается матрицей направляющих косинусов.

Положение плоского стержневого элемента характеризуется 6-ю независимыми узловыми перемещениями (6-ю степенями свободы — по 3 в каждом узле). Связь между узловыми перемещениями элемента в локальной и глобальной системах координат задается формулой $\Delta = L \cdot \bar{\Delta}$, где Δ и $\bar{\Delta}$ — вектор перемещений элемента соответственно в локальной и глобальной системах координат, L — матрица направляющих косинусов.

Поскольку каждому узловому перемещению соответствует своя узловая сила, то такая же связь между узловыми силами F и \bar{F} в локальных и глобальных осях координат $F = L \cdot \bar{F}$.

Основное уравнение матричного метода: $F = K \cdot \Delta$ в локальной системе координат и $\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{\Delta}$ в глобальной системе координат.

Связь между матрицами жесткости: K в локальной и \bar{K} в глобальной системах координат $\bar{K} = L^T \cdot K \cdot L$.

В плоской задаче для задания матрицы направляющих косинусов, приведенной на рис. 50П.3, достаточно для каждого элемента задать угол α между осями x (локальной и глобальной).

В нашем примере консольная балка разбита на 7 элементов. У каждого элемента по 6 узловых перемещений. Значит, в 7 матричных уравнениях содержится $7 \times 6 = 42$ перемещения. Как показано на рис. 50П.1, рассматриваемая балка имеет 21 узловое перемещение (по 3 в каждом узле и в заделке нет перемещений). Чтобы их найти, надо систему из 42 уравнений с 42 неизвестными превратить в систему из 21 уравнения с 21 перемещением. Эта задача выполняется с помощью матрицы соответствия индексов (рис. 50П.2).

Матрица индексов показывает, какому номеру перемещения всей стержневой системы соответствует локальный номер перемещения каждого элемента в глобальной системе координат.

С помощью матрицы индексов формируется матрица жесткости системы путем суммирования соответствующих коэффициентов жесткости.

Коэффициент жесткости системы $K_{i,j}$ равен сумме коэффициентов жесткости элементов, которым в матрице индексов одновременно принадлежат индексы i и j .

Выражение для суммирования коэффициентов жесткости приведено на рис. 50П.4, внизу.

Обнуление матрицы жесткости системы

$k := 1..N \quad i := 1..n+1 \quad j := 1..n+1 \quad K_{i,j} := 0$

При ORIGIN=1 не может быть индексов, равных нулю

$i := 1..6 \quad j := 1..6 \quad MI_{k,i} := \text{if}(MI_{k,i} = 0, n+1, MI_{k,i})$

При этом размер матрицы увеличился на 1

матрица жесткости элемента в глобальных осях координат

$$KEG(k,i,j) := (L_k^T \cdot KE_k \cdot L_k)_{i,j}$$

матрица жесткости системы

$$K_{MI_{k,i}, MI_{k,j}} := K_{MI_{k,i}, MI_{k,j}} + KEG(k,i,j)$$

$K := \text{submatrix}(K, 1, n, 1, n)$

Рис. 50П.4. Формирование матрицы жесткости системы

При расчете в Mathcad возникает неожиданная трудность. Для удобства работы с матрицами введено **ORIGIN=1**, но в таком случае в матрицах не может быть элементов с номером 0. Чтобы выйти из этого тупика, в матрице индексов 0 заменен на $n+1$, где n — максимальный номер перемещения системы. При этом вместо матрицы размерностью $n \times n$ получается матрица размерностью $(n+1) \times (n+1)$. После формирования матрицы жесткости лишние строку и столбец удаляем с помощью функции **submatrix**.

ПРИМЕЧАНИЕ

Нуль в матрице индексов означает отсутствие перемещения системы по данному направлению.

После формирования матрицы жесткости системы выполняется решение системы линейных алгебраических уравнений путем обращения матрицы жесткости системы (рис. 50П.5). В результате решения получается вектор узловых перемещений системы в глобальных осях координат.

Перемещения элементов в глобальных осях определяются с помощью матрицы индексов путем присвоения перемещениям элементов соответствующих перемещений системы.

Далее определяются перемещения элементов в локальных осях координат с помощью матрицы направляющих косинусов, затем узловые силы, действующие на элементы, в локальных осях координат из основного уравнения матричного метода, записанного для элемента в локальных осях координат $F^e = K^e \cdot \Delta^e$. Результаты статического расчета перемещений и усилий, действующих на балку, приведены на рис. 50П.5.

решение системы уравнений $\Delta := K^{-1} \cdot F$ статические перемещения системы

перемещения элементов в глобальных осях $\Delta e_{j,k} := \Delta M_{I_{k,j}}$ $\Delta_{n+1} := 0$

перемещения элементов в локальных осях $\Delta e_l^{(k)} := L_k \cdot \Delta e^{(k)}$

узловые нагрузки в локальных осях

$$F_l^{(k)} := K E_k \cdot \Delta e_l^{(k)}$$

прогибы балки

$$\ddot{u} := 2, 5 \dots 21$$

$$F_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -0.7 & -0.6 & -0.5 & -0.4 & -0.3 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & -0 \end{pmatrix}$$

N

Q

M

N

Q

M

$$\Delta \ddot{u} =$$

| |
|-------|
| 0.003 |
| 0.013 |
| 0.028 |
| 0.047 |
| 0.069 |
| 0.093 |
| 0.118 |

Рис. 50П.5. Определение перемещений и усилий в балке

Поскольку внешние силы не участвуют в определении собственных частот, вектор внешних сил можно не задавать, то есть ввести $F_i = 0$. Значения собственных частот останутся верными при любых значениях внешних сил, но смотреть на результат статического расчета будет скучно: в таблицах одни нули. Для оживления картины приложена одна вертикальная сила на правом конце балки $F_{20} = 1$. В этом случае таблица внутренних усилий (рис. 50П.5) наглядна, как эпюры внутренних сил.

Динамический расчет балки

При динамическом нагружении зависимость перемещений упругой системы от времени описывается дифференциальным уравнением движения

$M \cdot \Delta'' + H \cdot \Delta' + K \cdot \Delta = F(t)$, где:

- $F(t)$ — вектор внешних сил, переменных во времени;
- $\Delta, \Delta', \Delta''$ — узловые перемещения упругой системы и их первая и вторая производные по времени;
- M, H, K — соответственно матрицы масс, диссипации (рассеивания) и жесткости.

Определение собственных частот колебаний балки

Для определения собственных частот колебаний рассматриваются свободные незатухающие колебания, то есть $H=0$ и $F(t)=0$. Тогда уравнение движения имеет вид:

$$M \cdot \Delta'' + K \cdot \Delta = 0.$$

Предполагается, что колебание всех точек происходит по синусоидальному закону $\Delta = A \sin(\omega t + \varepsilon)$, тогда решение уравнения движения сводится к решению нестандартной задачи на собственные числа $(K - \omega^2 \cdot M) \cdot A = 0$, где ω — собственная частота (собственное число), A — форма колебания (собственный вектор).

Для решения такой задачи Mathcad содержит 2 встроенные функции: **genvals** — вычисление собственных чисел и **genvecs** — вычисление собственных векторов.

Применение этих функций к решению нашей задачи показано на рис. 50П.6.


```

k := 1..N   i := 1..n+1   j := 1..n+1   MMi,j := 0

матрица масс системы   i := 1..6   j := 1..6

MMMIk,i, MIk,j := MMMIk,i, MIk,j + (Mk)i,j

MM := submatrix(MM, 1, n, 1, n)

учет сосредоточенных масс   MMkk, kk := MMkk, kk + m0
m0 - сосредоточенная масса
kk - номер перемещения, по которому колеблется масса m0

m0 и k - заданы глобально под графиком форм колебаний
поменяйте их и посмотрите на изменение собственных частот

определение собственных частот  $\Omega$  колебаний балки

 $\Omega := \text{genvals}(K, MM)$     $\Omega := \text{sort}(\Omega)$     $\Omega_{\text{рад}} := \sqrt{\Omega}$     $\Omega_{\text{Герц}} := \frac{\Omega_{\text{рад}}}{2 \cdot \pi}$ 

определение собственных векторов  $\Lambda$  (форм колебаний)

 $\Lambda := \text{genvecs}(K, MM)$     $\Lambda^{(i)} := \Lambda^{(n-i+1)}$    i := 1..n

```

Рис. 50П.6. Определение собственных частот и форм колебаний балки

Необходимая для расчета матрица масс стержневого элемента — стандартная. Она введена в расчет на рис. 50П.3.

Рассматривается балка из оргстекла. Плотность материала и модуль Юнга заданы на рис. 50П.2. Практически это длинная и тонкая пластмассовая линейка.

Матрица масс стержневой системы формируется аналогично матрице жесткости путем суммирования коэффициентов с помощью матрицы индексов. Сравните выражения на рис. 50П.4 и 50П.6 для формирования матрицы жесткости системы и матрицы масс системы. Они аналогичны.

Если в упругой системе есть сосредоточенные массы, то их учет производится путем добавления в уже сформированную матрицу масс системы сосредоточенной массы, приложенной в заданном узле.

Обратите внимание, что рассматриваемая балка колеблется в вертикальном направлении. Массу груза, приложенного на конце балки, надо добавить к трем значениям матрицы масс $MM_{19,19}$, $MM_{20,20}$ и $MM_{21,21}$. Перемещения 19 и 21 — горизонтальное и угловое — не влияют на собственные частоты балки (они равны нулю в расчете) и только поэтому (и только в данном примере) можно добавить сосредоточенную массу к значению $MM_{20,20}$ по вертикальному направлению.

Для удобства наблюдений сосредоточенная масса и направление ее приложения заданы глобально под таблицей собственных частот (рис.50П.7). Поменяйте заданные значения и наблюдайте изменение вектора собственных частот балки и форм колебаний.

Функция **genvals** возвращает вектор собственных чисел симметричной матрицы. В нашем примере балка имеет 21 независимое перемещение. Соответственно вектор собственных чисел содержит 21 число, но из них только 4–5 являются собственными частотами колебаний.

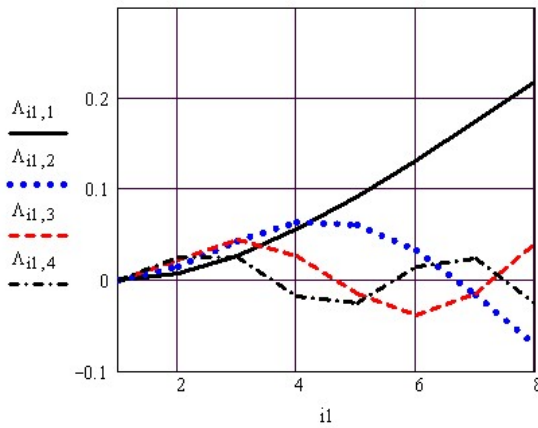
В силу сделанных при выводе уравнения допущений, чем больше порядковый номер собственного числа, тем больше накопленная ошибка вычислений.

Функция **genvecs** выдает спектр собственных векторов, каждый из которых представляет собой форму колебания в момент резонанса на заданной частоте.

Алгоритм решения задачи не позволяет найти перемещения балки в процессе колебательного движения из-за нехватки одного уравнения. Функция **genvecs** возвращает числа, представляющие собой перемещения балки в некотором произвольном масштабе. Выведенные перемещения нормируются и после нормировки численные значения для всех собственных векторов одного порядка (см. рис. 50П.7).

выбираем вертикальные перемещения балки (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20) и строим график форм колебаний

$$\Lambda_{i+1,i} := \Lambda_{i,i} \quad i1 := 1..8 \quad \Lambda_{1,i} := 0 \quad \Delta_1 := 0$$



$$m_0 = 0.005 \quad \text{поменяйте сосредоточенную массу } m_0 \\ k_k = 20 \quad \text{и направление ее движения } k$$

| i = | $\Omega_{\text{герц}_i} =$ | $\Omega_{\text{рад}_i} =$ |
|-----|----------------------------|---------------------------|
| 1 | 2.674 | 16.8 |
| 2 | 16.959 | 106.558 |
| 3 | 47.936 | 301.19 |
| 4 | 94.843 | 595.916 |
| 5 | 158.533 | 996.09 |
| 6 | 240.045 | $1.508 \cdot 10^3$ |
| 7 | 338.825 | $2.129 \cdot 10^3$ |
| 8 | 493.039 | $3.098 \cdot 10^3$ |
| 9 | 645.705 | $4.057 \cdot 10^3$ |
| 10 | 754.903 | $4.743 \cdot 10^3$ |
| 11 | 847.473 | $5.325 \cdot 10^3$ |
| 12 | $1.103 \cdot 10^3$ | $6.932 \cdot 10^3$ |
| 13 | $1.42 \cdot 10^3$ | $8.92 \cdot 10^3$ |
| 14 | $1.772 \cdot 10^3$ | $1.113 \cdot 10^4$ |
| 15 | $2.054 \cdot 10^3$ | $1.29 \cdot 10^4$ |
| 16 | $2.303 \cdot 10^3$ | $1.447 \cdot 10^4$ |

Рис. 50П.7. Собственные частоты и формы колебаний балки

В действительности для рассмотренной в примере балки амплитуда колебаний в момент резонанса (с учетом затухания колебаний) составляет на первой собственной частоте порядка 25 мм, на второй частоте — порядка 5 мм, на третьей — порядка 1 мм, на четвертой — амплитуда колебаний мала, практически исчезает.

Вынужденные колебания балки

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы рассмотрены в примере 36. Перемещение точки приведения массы определялось с помощью интеграла Дюамеля.

Для системы с N степенями свободы необходимо решить уравнение движения системы

$$M \cdot \Delta'' + H \cdot \Delta' + K \cdot \Delta = F(t).$$

Это уравнение лучше всего решать одним из методов прямого интегрирования. При прямом интегрировании уравнение движения решается с помощью пошаговой численной процедуры, использующей метод конечных разностей. Никаких предварительных преобразований уравнения движения не производится.

На каждом шаге интегрирования, по существу, решается статическая задача. Равновесие с учетом сил демпфирования и инерции рассматривается в выбранных точках временного интервала.

Таким образом, для конкретного момента времени τ решается уравнение

$$\bar{K} \cdot q(\tau) = \bar{Q}, \quad \text{где } \bar{K} \text{ и } \bar{Q} \text{ — так называемые эффективные матрица жесткости и вектор нагрузок.}$$

Из этого уравнения определяется вектор обобщенных перемещений q в рассматриваемый момент времени τ .

Методы прямого интегрирования различаются способами интерполяции или экстраполяции перемещений на каждом достаточно малом временном интервале.

В данном примере для решения выбран метод Ньюмарка, называемый также методом обобщенного ускорения.

Этот метод использует следующие конечно-разностные соотношения:

$$q'(t + \Delta t) = q'(t) + [(1 - d_1) \cdot q''(t) + d_1 \cdot q''(t + \Delta t)] \cdot \Delta t;$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + q'(t) \cdot \Delta t + [(1/2 - d_2) \cdot q''(t) + d_2 \cdot q''(t + \Delta t)] \cdot \Delta t^2.$$

Здесь d_1 и d_2 — параметры интегрирования. При $d_1 = 0,5$ и $d_2 = 0,25$ приведенные соотношения будут отвечать предположению о постоянном характере ускорения на временном интервале $(t; t + \Delta t)$. При $d_1 = 0,5$ и $d_2 = 1/6$ — о линейном изменении ускорения, что аналогично методу Вилсона. При $d_2 = 0$ получим центрально-разностную схему вычислений, соответствующую двойной пульсации ускорения в начале и в конце каждого временного интервала. Таким образом, d_2 определяет закон изменения ускорения в пределах шага счета.

Параметр d_1 характеризует схемное (численное) демпфирование: при $0 \leq d_1 < 0,5$ — отрицательное, при $d_1 > 0,5$ — положительное, при $d_1 = 0$ схемное затухание отсутствует.

При решении конечномерных задач большой размерности рекомендуется принимать $d_1 \geq 0,5$ и $d_2 \geq 0,25$.

Эффективные матрица жесткости \bar{K} и вектор нагрузок \bar{Q} , входящие в основное уравнение включены в подпрограмму ZZ на рис. 50П.9.

Приведенный алгоритм реализует неявную двухслойную схему интегрирования. Исходные данные для расчета приведены на рис. 50П.8.

Экспериментальные коэффициенты в методе Ньюмарка

$$\xi := 0.05 \quad d1 := 0.5 \quad d2 := 0.25$$

Амплитуда вынуждающей силы

$$Q_0 := 5$$

Время наблюдения колебаний

$$t_k := 2$$

Поменяйте эти
параметры

Приращение времени

$$\Delta t := 0.01$$

Виды нагрузок, воздействующих на балку

Пилообразная нагрузка

$$t1 := 0.5$$

$$Q(t) := \frac{Q_0}{t1} \cdot \left(t - \text{floor}\left(\frac{t}{t1}\right) \cdot t1 \right)$$

Синусоидальная нагрузка

$$Q(t) := Q_0 \cdot \sin(10 \cdot t)$$

Прямоугольная импульсная нагрузка

оставьте включенной только
одну из трех нагрузок

$$t1 := 0.05$$

$$t2 := 0.5$$

$$T := t1 + t2$$

$$n1(t) := \text{floor}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$Q(t) := \text{if}(t < n1(t) \cdot T + t1, Q_0, 0)$$

$$M := MM$$

$$\omega := \Omega_{\text{рад}_1}$$

$$H := 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot M$$

$$j := 1..n$$

$$q1_j := 0$$

$$v1_j := 0$$

$$a1_j := 0$$

$$QV_j := 0$$

Здесь скрыта программа интегрирования уравнения движения методом Ньюмарка



Двойной щелчок мышью на этой линии *открывает* закрытую зону

Двойной щелчок мышью на этой линии *закрывает* открытую зону

Рис. 50П.8. Исходные данные для расчета вынужденных колебаний балки

Кроме коэффициентов $d_1 = 0,5$ и $d_2 = 0,25$, в исходных данных указаны: относительный коэффициент затухания колебаний $\xi = 0,05$ (на первой собственной частоте), амплитуда вынуждающей силы $Q_0 = 0,5$, временной шаг интегрирования $\Delta t = 0,01$ с, конец интервала интегрирования $t_k = 2$ с.

Заданы 3 выражения для вынуждающей силы (синусоидальной, прямоугольной, пилообразной). Работая с примером, поменяйте местами выражения для нагрузок, так как в расчет идет нижнее выражение, и наблюдайте эффект изменения перемещений при изменении вынуждающей силы.

Последние 2 строки на рис. 50П.8 — подготовка рассчитанных ранее массивов и обнуление новых массивов для передачи их в программу ZZ (рис. 50П.9).

Поскольку расчет повторяется многократно, он оформлен в виде программы. В начале программы присваиваются значения переменным и массивам, которые должны изменяться в процессе расчета. Далее пошаговый расчет оформлен в виде цикла **while**, расчет продолжается до нарушения критерия $t \leq t_k$.

В данном расчете действует одна вынуждающая сила по направлению *nn*. Она вводится в ранее обнуленный массив QV в виде $QV_{nn} \leftarrow Q(t)$.

Далее определяются эффективные матрица жесткости KK и вектор нагрузок QQ , учитывающие также матрицу масс M и матрицу диссипации (рассеивания) H .

```

]
ZZ := "начальные условия"
QV ← QV
t ← 0
q1 ← q1
v1 ← v1
a1 ← a1
n ← 0
"пошаговое решение уравнения движения"
while t ≤ tk
    n ← n + 1
    t ← t + Δt
    QVnn ← Q(t)
    KK ← K +  $\frac{M}{d2 \cdot \Delta t^2} + \frac{d1 \cdot H}{d2 \cdot \Delta t}$ 
    QQ ← QV + M ·  $\left[ \left( \frac{q1}{d2 \cdot \Delta t^2} \right) + \left( \frac{v1}{d2 \cdot \Delta t} \right) + \left( \frac{1}{2 \cdot d2} - 1 \right) \cdot a1 \right] \dots$ 
        + H ·  $\left[ \left( \frac{d1 \cdot q1}{d2 \cdot \Delta t} \right) + \left( \frac{d1}{d2} - 1 \right) \cdot v1 + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left( \frac{d1}{d2} - 2 \right) \cdot a1 \right]$ 
    q2 ← KK-1 · QQ<1>
    a2 ←  $\frac{1}{d2} \cdot \left[ \frac{(q2 - q1 - v1 \cdot \Delta t)}{\Delta t^2} - (0.5 - d2) \cdot a1 \right]$ 
    v2 ← v1 + [(1 - d1) · a1 + d1 · a2] · Δt
    q1 ← q2
    v1 ← v2
    a1 ← a2
    qq<n> ← q1
    vv<n> ← v1
    aa<n> ← a1
    "конец шага"
    (qq vv aa n)T
]

```

Рис. 50П.9. Программа расчета вынужденных колебаний, реализующая метод Ньюмарка

Из решения матричного уравнения $QQ = KK \cdot q2$ определяется вектор перемещений $q2$. Далее в процессе численного дифференцирования определяются вектор скоростей $v2$ и вектор ускорений $a2$. Цифра 2 означает конец шага.

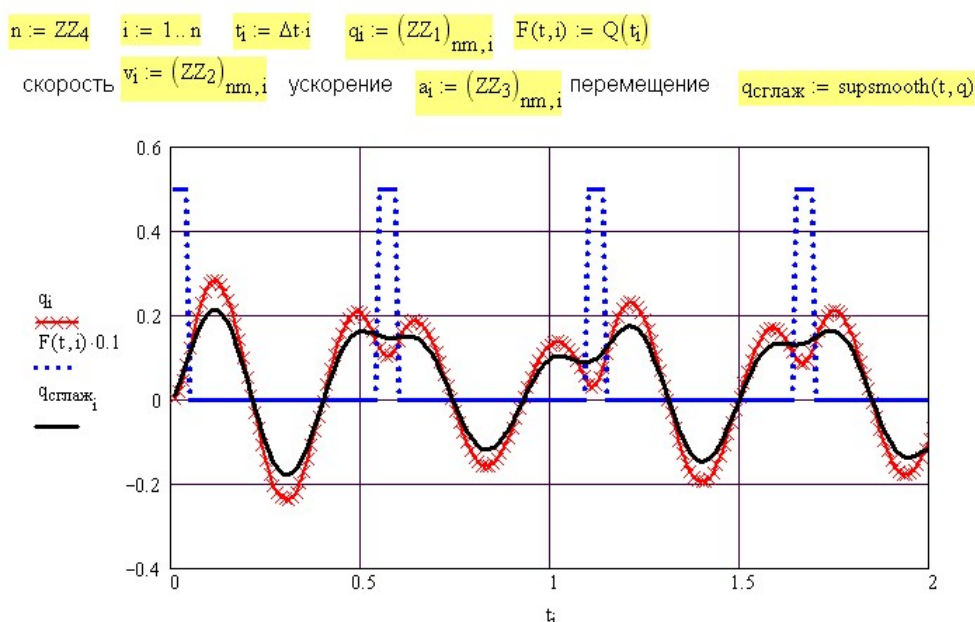
Для перехода к следующему шагу найденные значения $q2$, $v2$, $a2$ присваиваются величинам $q1$, $v1$, $a1$, соответствующим началу следующего шага.

Для последующего вывода результатов расчета найденные значения перемещений, скоростей и ускорений записываются в массивы qq , vv , aa , столбец n которых соответствует шагу n расчета.

Составной массив вывода результатов расчета для экономии места в программе записан в виде строки.

Результаты расчета приведены на рис. 50П.10. Пунктиром на графике показана зависимость силы F от времени t . Для примера выбрана прямоугольная нагрузка.

Перемещения q взяты из составного массива вывода данных программы ZZ . На графике показаны перемещения конца балки ($nm = 20$). Поменяйте значение nm (номер перемещения) и значение nt (номер направления, по которому действует вынуждающая сила F). Поменяйте саму вынуждающую силу, включая и выключая выражения для нее (рис. 50П.8).



$nm = 17$ номер направления, по которому действует вынуждающая сила F

$nm = 20$ номер перемещения q , зависимость которого от времени показана на графике

Глядя на схему балки, поменяйте nn и nm

Рис. 50П.10. Зависимость перемещения q конца балки ($nm=20$) от времени t под действием вынуждающей силы F

На рисунке 50П.10 приведены 2 графика перемещения. Один (точки обозначены крестиками) построен по значениям выходного массива ZZ_1 . Второй — с использованием функции сглаживания данных **supsmooth** (сплошная жирная линия). Графики изменения скорости и ускорения на рисунке отсутствуют, чтобы не затенять график перемещения.

Анимация колебаний балки

На примере колебаний балки удобно показать создание движущихся объектов (анимацию). Для создания анимации в расчетные формулы надо ввести переменную **FRAME** — номер кадра.

В наше примере движущийся объект — это балка в процессе колебаний. Надо показать на графике упругую линию изогнутой балки в различные моменты времени.

Анимация результатов расчета

для проигрывания анимации
щелкните мышью на этом объекте

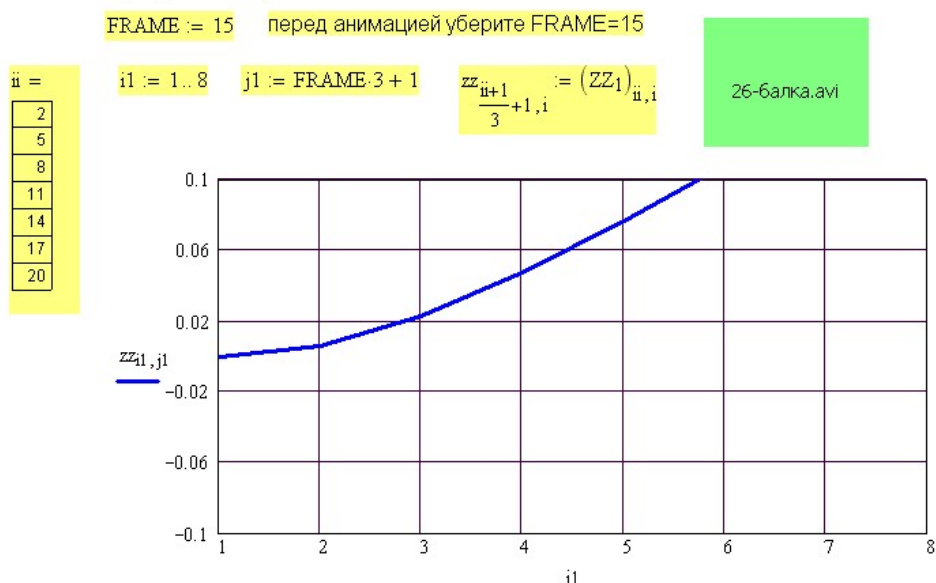


Рис. 50П.11. Подготовка к анимации колебаний балки

Для построения упругой линии используем вертикальные перемещения семи узлов балки. Номера этих перемещений заданы массивом ii (рис. 50П.11). В массиве выходных данных ZZ_1 каждый столбец представляет собой 21 перемещение, соответствующие определенному моменту времени t .

Переменная **FRAME** должна задавать номер столбца перемещений. Чтобы ограничить число кадров анимации (один кадр — один график) берем не все столбцы подряд, а, в нашем примере, через 3 столбца.

Для создания анимации надо построить график, соответствующий одному (первому) кадру, при **FRAME=0** (рис. 50П.11). Поскольку **FRAME** — номер кадра, можно ввести какое-либо значение **FRAME**, чтобы посмотреть неподвижную картинку будущей анимации. Но не забудьте удалить значение **FRAME** перед созданием анимации.

Рассмотрим создание анимации.

- ❑ В главном меню Mathcad выберите команду **View ► Animate** (Вид ► Анимировать);
- ❑ В появившемся окне введите значения переменной **FRAME: from 0 (от 0) to 12** (до 12 для нашего примера);
- ❑ Задайте скорость движения кадров **at Frames/sec** (кадров в секунду) — лучше 3 кадра в секунду.
- ❑ При нажатой левой кнопке мыши обведите пунктирной рамкой границы объекта.
- ❑ Нажмите кнопку **Animate** и наблюдайте создание кадров. На экране появится окно проигрывателя **Playback**. Нажмите кнопку пуска и посмотрите, устраивает ли вас созданная анимация. Если устраивает, надо сохранить анимацию как avi-файл.
- ❑ Нажмите кнопку **Save as** (Сохранить как), выберите в появившемся окне нужный каталог, задайте имя файла и нажмите кнопку **Save** (Сохранить).
- ❑ В главном меню Mathcad выберите пункт **Insert ► Object** (Вставка ► Объект).
- ❑ В появившемся окне **Insert Object** (Вставка объекта) выберите команду **From file** (Создать из файла), с помощью кнопки **Browse** (Обзор) найдите нужный файл, затем установите флажок **Связь** и нажмите **OK**.

Появившийся объект оживляется двойным щелчком мыши на нем.

Не плохо бы отредактировать объект. Щелкните на нем правой кнопкой мыши. В появившемся контекстном меню выберите команду **Связанный объект: видеозапись ► Правка**. Появится окно **Видеозапись в Client Document**. Установите флажок **Правка ► Параметры ► Автоповтор** и щелкните на кнопке **OK**. Теперь при двойном щелчке мышью на объекте вы будете видеть непрерывное колебательное движение балки. В меню видеопроигрывателя есть и другие пункты. Поупражняйтесь с ними самостоятельно, если хотите.

Пример 51. Динамический расчет плоской рамы

(Программа 51-МКЭ-2-рама.mcd)

На той же программе, что и расчет консольной балки в примере 50, проводится расчет плоской рамы. Подробные пояснения к методу расчета также приведены в примере 50. Схема рассмотренной рамы показана на рис. 51П.1.

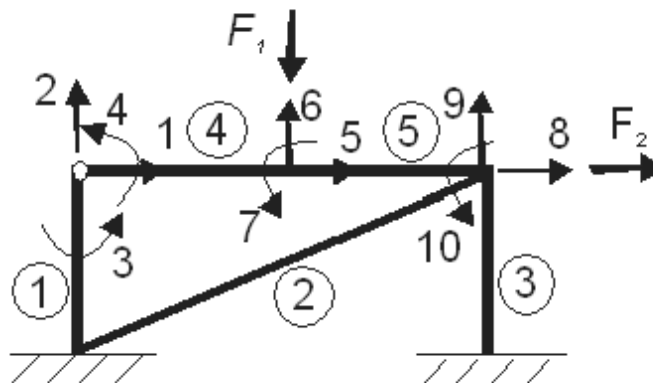


Рис. 51П.1. Расчетная схема плоской балки

Рама разбита на 5 элементов-стержней. Элементы 1, 2, 3 — круглого сечения, деревянные брусья. Элементы 4 и 5 — стальная пластина прямоугольного сечения. Номера элементов указаны в кружках, номера перемещений (степеней свободы) — без кружков. Начало координат взято для элементов 1, 2, 3 внизу, для элементов 4 и 5 на левом конце этих элементов. Соответственно в начале координат локальные номера перемещений 1, 2, 3. На другом конце элемента — 4, 5, 6. Это необходимо для составления матрицы индексов.

Исходные данные для расчета приведены на рис. 51П.2.



Рис. 51П.2. Исходные данные для расчета плоской рамы

В исходных данных к расчету рамы добавлен учет граничных условий в перемещениях. В расчете консольной балки (пример 50) такой необходимости не было. Учесть граничные условия можно двумя способами.

Первый способ.

Пусть задано перемещение Δ_j . Это означает, что в системе уравнений

$$\begin{cases} F_1 = K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + \dots + k_{1j}\Delta_j + \dots + K_{1n}\Delta_n \\ F_2 = K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + \dots + k_{2j}\Delta_j + \dots + K_{2n}\Delta_n \\ \dots \\ F_j = K_{j1}\Delta_1 + K_{j2}\Delta_2 + \dots + k_{jj}\Delta_j + \dots + K_{jn}\Delta_n \\ \dots \\ F_n = K_{n1}\Delta_1 + K_{n2}\Delta_2 + \dots + k_{nj}\Delta_j + \dots + K_{nn}\Delta_n \end{cases}$$

все члены $k_{ij}\Delta_j$ ($i=1, 2, \dots, n$) известны. Перенесем их в правые части уравнений, то есть вместо столбца $\{F\}$ будем иметь $\{F - k_{ij}\Delta_j\}$. Сохраняя размерность матрицы $[K]$ все элементы k_{ij} заменим нулями. Этим обеспечивается эквивалентность системы. Так как одно из уравнений становится лишним, то вместо j -го уравнения запишем $k_{jj}\Delta_j = k_{jj}\Delta_j$, чему соответствует замена силы F_j на $k_{jj}\Delta_j$ и сохранение в матрице $[K]$ диагонального элемента $k_{jj}\Delta_j$.

Другими словами, к вектору сил $\{F\}$ прибавить столбец j матрицы $[K]$, а в матрице $[K]$ обнулить строку j и столбец j , вернуть на место диагональный элемент k_{jj} .

Таким образом, учитываются все заданные граничные элементы.

Второй способ учета граничных условий называется способ Пиано и заключается в умножении на большое число соответствующего диагонального элемента, например, $k_{jj}\Delta_j 10^6$ и добавлении этого же выражения к правой части этого уравнения, то есть фактически выполнение равенства $k_{jj}\Delta_j 10^6 = k_{jj}\Delta_j 10^6$, поскольку остальные слагаемые становятся ничтожно малыми. Учет граничных условий в Mathcad-программах показан на рис. 51П.3.

учет граничных условий в перемещениях $j := 1..n$ $i := 1..rows(g)$

$$F_j := \text{for } i \in 1..rows(g) \\ F_j \leftarrow F_j - K_{j, g_i} \cdot \Delta g_i$$

$$F_{g_i} := K_{g_i, g_i} \cdot \Delta g_i$$

$$K_{g_i, j} := \begin{cases} K_{g_i, j} & \text{if } g_i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_{j, g_i} := \begin{cases} K_{j, g_i} & \text{if } g_i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Метод Пиано учета граничных условий

$$K_{g_i, g_i} := K_{g_i, g_i} \cdot 10^6$$

$$F_{g_i} := K_{g_i, g_i} \cdot \Delta g_i$$

Выключите один и включите другой
способы учета граничных условий
Результаты не изменятся

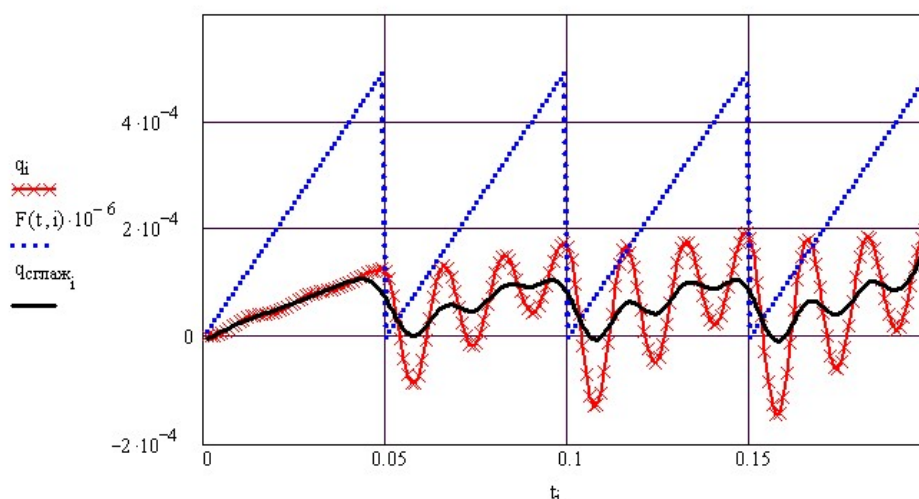
Рис. 51П.3 Два метода учета граничных условий

Далее программа расчета та же, что и для консольной балки и описана в примере 50. Вся программа с результатами расчета есть на компакт-диске в электронной книге.

В динамическом расчете для рамы найдены вектор собственных частот колебаний Ω , из которых лишь первые 4 частоты близки к истине. Спектр собственных векторов Λ дает соотношение узловых перемещений (форму колебаний), но построить графики форм колебаний нельзя, так как фактически на каждом графике будет только 2 точки — начало и конец элемента.

Вынужденные колебания плоской рамы под действием заданной силы $Q(t)$ определяются методом Ньюмарка прямого интегрирования уравнения движения также как для балки в примере 50. Результаты расчета приведены на рис. 51П.4.

$$n := ZZ4 \quad i := 1..n \quad t_i := \Delta t \cdot i \quad q_i := (ZZ1)_{nm,i} \quad F(t,i) := Q(t_i)$$

$$v_i := (ZZ2)_{nm,i} \quad a_i := (ZZ3)_{nm,i} \quad q_{\text{сглаж}} := \text{supsmooth}(t, q)$$


$nm \equiv 6$ номер направления, по которому действует вынуждающая сила F

$nm \equiv 6$ номер перемещения q , зависимость которого от времени показана на графике

Глядя на схему рамы, поменяйте nm и pn

Рис. 51П.4. Вынужденные колебания рамы

Порядок ввода исходных данных

Для статического и динамического расчетов какой-либо другой рамы укажем порядок подготовки исходных данных.

1. Плоскую раму разбить на элементы-стержни. Точки приложения нагрузок обязательно являются границей элементов.
2. Выбрать глобальные оси координат (единые для всей системы).
3. Выбрать локальные оси координат, то есть для каждого элемента показать направление оси x вдоль стержня.
4. Обозначить все возможные узловые перемещения плоской рамы. На рис. 51П.1 в заделках нет перемещений, в промежуточных узлах по 3 перемещения (два линейных и одно угловое). В подвесном шарнире (слева сверху) угловые перемещения элементов 1 и 4 различные, им даны номера 3 и 4.
5. Составить матрицу индексов путем сопоставления локальных номеров перемещений каждого элемента с глобальными перемещениями рамы на границах элемента.
6. Задать углы α между осью X глобальной и осями x каждого элемента. Угол α всегда положительный (от 0 до 180 градусов).
7. Ввести вектор сил F . Поскольку заданы обычно одна или две силы, то вначале обнуляется весь вектор, число элементов которого равно числу перемещений системы, затем с соответствующим индексом вводятся заданные силы. Все силы прикладываются только в узлах элементов.
8. Ввести характеристики материала (плотность ρ , модуль Юнга E , модуль сдвига G).
9. Ввести геометрические характеристики элементов (длину, размеры и площадь поперечного сечения, осевой момент инерции сечения).
10. Для определения собственных частот колебаний, если есть сосредоточенные массы на раме, их надо задать (только в узлах элементов). Для каждой массы указать два глобальных линейных перемещения (угловое можно не указывать, оно не введено в алгоритм решения задачи).
11. Для расчета вынужденных колебаний системы надо задать характер вынуждающей силы $Q(t)$, номер направления pn , по которому она действует, номер перемещения nm , зависимость которого от времени вы хотите увидеть на экране.

Пример 52. Расчет пространственной стержневой системы

(Программа 52-МКЭ-3-простран.mcd)

Для заданной пространственной стержневой системы требуется определить внутренние усилия в стержнях, напряжения и перемещения узловых точек при статических и динамических нагрузках.

Пространственную стержневую систему рассчитываем матричным методом перемещений, аналогично плоской задаче из примеров 50 и 51. Рассматриваемая система (рис. 52П.1) разбита на 6 элементов-стержней. Элемент 1 с одной стороны жестко заделан, с другой приварен к подвижной втулке, скользящей и поворачивающейся по стержню 2–3. Левый конец элемента 2 приварен к подвижной оси, допускающей поворот и скольжение вдоль оси Z . Элемент 6 прикреплен к оси, допускающей только вращение (без скольжения). Элемент 4 прикреплен внизу к сферической шарнирной опоре, допускающей вращение вокруг трех осей.

Всего заданная система имеет 20 независимых перемещений. Чтобы не загромождать чертеж, номера перемещений указаны в рамке в виде диапазона номеров перемещений в каждом узле.

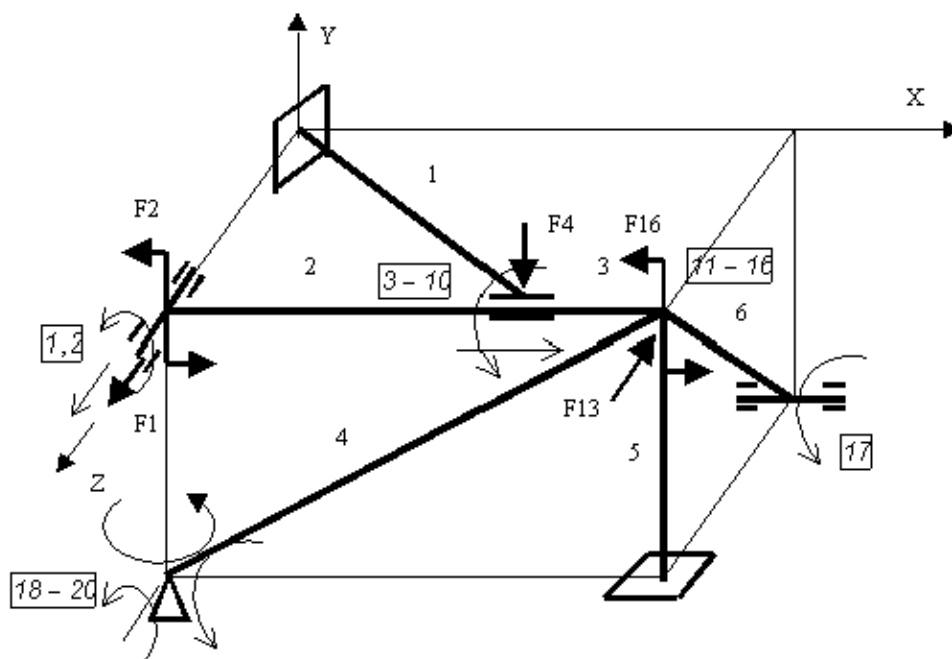


Рис. 52П.1. Схема пространственной стержневой системы

Применяемый пространственный элемент имеет 12 степеней свободы (рис. 52П.2). Соответствие 12 перемещений каждого пространственного элемента 20 перемещениям заданной стержневой системы указано в матрице индексов.

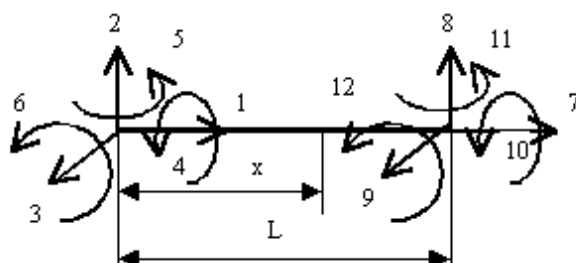


Рис. 52П.2. Пространственный стержневой элемент

ввод вектора сил F ввод геометрических характеристик

$F := \text{READPRN}("27-f")$ $S := \text{READPRN}("27-s")$

ввод матрицы индексов ввод углов между осями

$MI := \text{READPRN}("27-mi")$ $\alpha := \text{READPRN}("27-\alpha")$

$L := S^{(1)}$ $A := S^{(2)}$ $J_x := S^{(3)}$ $J_y := S^{(4)}$ $J_z := S^{(5)}$

$N := \text{rows}(MI)$ $n := \text{max}(MI)$

число элементов $N = 6$ число перемещений $n = 20$

номер элемента $k := 1..N$ номер перемещения $i := 1..n$

свойства материала плотность $\rho_k := 7800$

модуль Юнга $E_k := 2 \cdot 10^{11}$ модуль сдвига $G := 0.4 \cdot E$

Рис. 52П.3. Ввод исходных данных к расчету

Часть исходных данных (рис. 52П.2) введена непосредственно с клавиатуры: модуль Юнга E , модуль сдвига G , плотность материала ρ . Вектор сил и геометрические характеристики сечений стержней и матрицу индексов можно было также ввести с клавиатуры, но они считаны из файлов **p.prn**, **s.prn** и **mi.prn** с помощью функции **READPRN**. Считанные из файлов величины с присвоенными им именами приведены на рис. 52П.4.

Все расчеты в данном примере ведутся в системе Си. Геометрические характеристики в файле **s.prn** записаны в сантиметрах, поэтому в нижней части рис. 52П.4 они переведены в метры.

Вести расчеты с учетом размерностей, как и в примерах 50 и 51 невозможно, так как коэффициенты матрицы жесткости имеют различную размерность. В примере 53 расчет методом конечных элементов выполнен с учетом размерностей, так как там не учитываются угловые перемещения и элементы матрицы жесткости имеют одинаковую размерность.

| k = | L _k = | A _k = | J _{xk} = | J _{yk} = | J _{zk} = | |
|-----|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--|
| 1 | 56.4 | 7.1 | 16.2 | 8.1 | 8.1 | геометрические характеристики в см |
| 2 | 40 | 7.1 | 16.2 | 8.1 | 8.1 | |
| 3 | 20 | 7.1 | 16.2 | 8.1 | 8.1 | |
| 4 | 72.1 | 7.1 | 16.2 | 8.1 | 8.1 | |
| 5 | 40 | 7.1 | 16.2 | 8.1 | 8.1 | |
| 6 | 56.4 | 7.1 | 16.2 | 8.1 | 8.1 | |

| | |
|--|---------------------|
| $MI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 4 & 5 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 19 & 20 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ | матрица индексов |
|--|---------------------|

| | |
|--|------------|
| $F^T = (1000 \ 100 \ 0 \ -3000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1000 \ 0 \ 0 \ 100 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ | вектор сил |
|--|------------|

| | | | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------|
| $L := L \cdot 10^{-2}$ | $A := A \cdot 10^{-4}$ | $J_x := J_x \cdot 10^{-8}$ | $J_y := J_y \cdot 10^{-8}$ | $J_z := J_z \cdot 10^{-8}$ | перевод см в м |
|------------------------|------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------|

| | |
|--|-----------------|
| $m := \overrightarrow{(\rho \cdot A \cdot L)}$ | массы элементов |
|--|-----------------|

Рис. 52П.4. Исходные данные к расчету

В пространственной задаче каждая локальная ось элемента образует 3 угла с глобальными осями координат стержневой системы, поэтому для каждого элемента задается строка из 9 углов (рис. 52П.5). Над матрицей углов показано между какими осями записан угол. Косинусы этих углов входят в матрицу направляющих косинусов. Для вычисления косинусов используется оператор векторизации, так как аргумент косинуса — матрица, а не число или вектор.

$$\begin{matrix}
 l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} & l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} & l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ} \\
 \alpha = & \begin{pmatrix} 45 & 90 & 45 & 90 & 0 & 90 & 135 & 90 & 45 \\ 0 & 90 & 90 & 90 & 0 & 90 & 90 & 90 & 0 \\ 0 & 90 & 90 & 90 & 0 & 90 & 90 & 90 & 0 \\ 34 & 56 & 90 & 124 & 34 & 90 & 90 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 90 & 0 & 90 & 90 & 90 & 90 & 0 \\ 90 & 45 & 45 & 90 & 135 & 45 & 0 & 90 & 90 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Углы α и косинусы l для матрицы направляющих косинусов

$$l := \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha\right)$$

Рис. 52П.5. Углы между локальными и глобальными осями координат

Три стандартные матрицы, в том числе и матрица направляющих косинусов, скрыты от глаз в закрытой зоне (рис. М2.6). По виду и содержанию они такие же, как в примерах 50 и 51 (см. рис. 50П.3), но занимают гораздо больше места. В плоской задаче эти матрицы имеют размерность 6×6 , в пространственной — 12×12 .

Чтобы создать закрытую зону, выберите в главном меню команду **Insert ▶ Area** (Вставка ▶ Зона). Появятся две горизонтальные линии. Щелкните на каждой из них левой кнопкой мыши и перетащите их в начало и в конец будущей зоны. Теперь щелкните на одной из них правой кнопкой мыши и в открывшемся контекстном меню выберите команду **Collapse** (Сжать). Содержимое зоны исчезнет из виду, но останется в программе расчета.

Чтобы открыть закрытую зону, дважды щелкните мышью на линии, за которой скрыта зона.

Как уже сказано, скрытые матрицы размерностью 12×12 содержат по 144 элемента. Mathcad позволяет набрать с клавиатуры матрицу, содержащую не более 100 элементов. Поэтому набраны отдельно две половинки матрицы, которые затем объединены функцией **augment**.

Порядок статического расчета пространственной стержневой системы такой же, как и плоской. Он описан в примере 51. Так же формируется матрица жесткости системы (рис. 50П.4), задаются граничные условия (рис. 51П.3), решается система уравнений, определяются перемещения и узловые усилия в стержнях (рис. 50П.5). Результаты расчета на рис. 52П.8.

Зная узловые перемещения Δ , с помощью функций формы $N(x)$ можно найти перемещение произвольного сечения $U(x)$ каждого элемента-стержня по формуле $U(x) = N(x) \cdot \Delta$,

где $N(x)$ — матрица функций формы размерностью 2×6 для плоской задачи, 3×12 — для пространственной задачи. Функции формы (функции Эрмита) приведены на рис. 52П.6. Там же приведены графики перемещений по трем осям X, Y, Z .

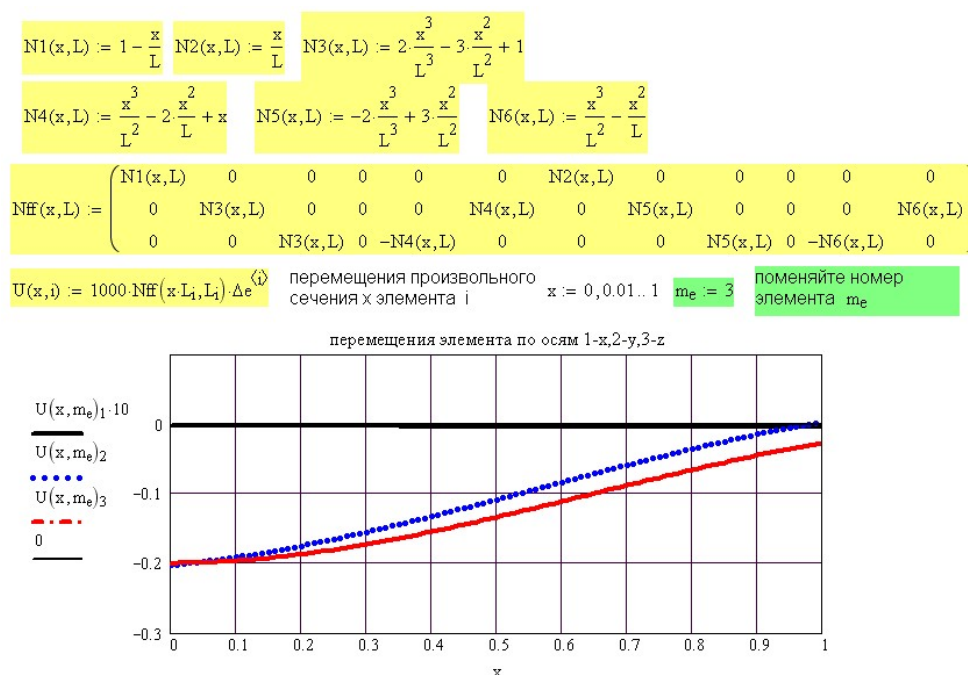


Рис. 52П.6. Упругая линия деформированного стержневого элемента

Поменяйте номер элемента m_e , чтобы посмотреть вид упругой линии других элементов.

Динамический расчет пространственной стержневой системы ведется так же, как и плоской системы в примерах 51 и 52 (рис. 50П.6). Сформировав матрицу масс системы, с помощью функций **genvals** и **genvecs** определяем вектор собственных частот Ω и спектр собственных векторов Λ . Правда в случае рамы (и

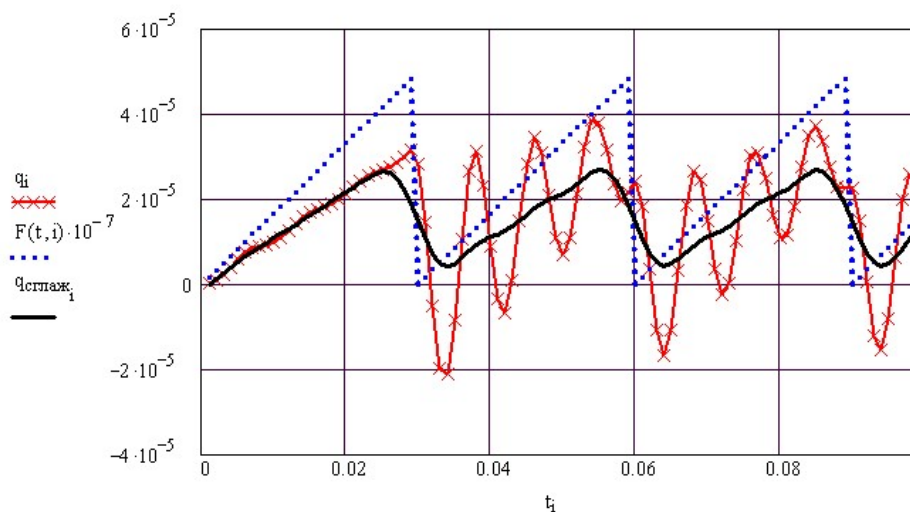
пространственной и плоской) построить графики форм колебаний не удастся. Ведь перемещения определяются только в узлах (по концам стержней). По двум точкам кривую не построить. Необходимо разбивать каждый элемент на несколько элементов или вместо линейного использовать квадратичный элемент.

| РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|------|-------|-------|------|------|---|-------|-------|-------------------------|--------------------------|--|--|--|--|--|
| узловые нагрузки на элементы | | | | | | узловые перемещения Δ по направлению i | | | | | | собственные частоты Ω колебаний системы | | | |
| $F_i =$ | 307 | 100 | 100 | -234 | -978 | 4306 | N_x | $i =$ | $\Delta_i \cdot 10^3 =$ | $\Omega_{\text{герц}} =$ | | | | | |
| | 115 | 888 | -1998 | 73 | 480 | -1 | Q_y | 1 | 0.128 | 127.8 | | | | | |
| | 307 | 1000 | -2218 | 64 | 110 | -345 | Q_z | 2 | -0 | 212.2 | | | | | |
| | -22 | 1 | 1 | 0 | 26 | 0 | M_x | 3 | -0 | 275.6 | | | | | |
| | -86 | -200 | 287 | 0 | -20 | 65 | M_y | 4 | -0.203 | 301.2 | | | | | |
| | 42 | 159 | -227 | 0 | 64 | -0 | M_z | 5 | -0.2 | 500.9 | | | | | |
| | -307 | -100 | -100 | 234 | 978 | -4306 | N_x | 6 | -0.031 | 690.7 | | | | | |
| | -115 | -888 | 1998 | -73 | -480 | 1 | Q_y | 7 | -0.006 | 809.9 | | | | | |
| | -307 | -1000 | 2218 | -64 | -110 | 345 | Q_z | 8 | 0.447 | 1005.1 | | | | | |
| | 22 | -1 | -1 | 0 | -26 | -0 | M_x | 9 | 0.198 | 1147.9 | | | | | |
| | -87 | -200 | 157 | -46 | -24 | 130 | M_y | 10 | 0.934 | 1754.1 | | | | | |
| | 22 | 196 | -172 | 53 | 128 | -1 | M_z | 11 | -0 | 2475 | | | | | |
| | | | | | | | | 12 | 0.003 | 2660.4 | | | | | |
| | | | | | | | | 13 | -0.027 | | | | | | |
| | | | | | | | | 14 | -0.047 | | | | | | |
| | | | | | | | | 15 | -0.812 | | | | | | |
| | | | | | | | | 16 | 0.787 | | | | | | |

Рис. 52П.7 Результаты расчета пространственной стержневой системы

Вынужденные колебания пространственной стержневой системы под действием заданной силы $Q(t)$ определяются методом Ньюмарка прямого интегрирования уравнения движения также как для балки, рассмотренной выше (рис. 50П.8 и 50П.9). Результаты расчета приведены на рис. 52П.8.

$$\begin{aligned}
 n &:= ZZ_4 & i &:= 1..n & t_i &:= \Delta t \cdot i & q_i &:= (ZZ_1)_{nm,i} & F(t,i) &:= Q(t_i) \\
 v_i &:= (ZZ_2)_{nm,i} & a_i &:= (ZZ_3)_{nm,i} & q_{\text{сглаж}} &:= \text{supsmooth}(t, q)
 \end{aligned}$$



$nm = 4$ номер направления, по которому действует вынуждающая сила F

$nm = 4$ номер перемещения q , зависимость которого от времени показана на графике

Глядя на схему рамы, поменяйте nm и pn

Рис. 52П.8 Вынужденные колебания пространственной стержневой системы

Порядок ввода исходных данных

1. Заданную стержневую систему разбить на элементы-стержни. Точки приложения нагрузок обязательно являются границей элементов.
2. Выбрать глобальные оси координат (единые для всей системы).
3. Выбрать локальные оси координат, то есть для каждого элемента показать направление оси x вдоль стержня. Оси y и z лежат в плоскости сечения, образуя правостороннюю систему координат.
4. Обозначить все возможные узловые перемещения плоской рамы.
5. Составить матрицу индексов путем сопоставления локальных номеров перемещений каждого элемента с глобальными перемещениями рамы на границах элемента.
6. Задать углы α между глобальными осями X, Y, Z и локальными осями x, y, z

каждого элемента, как на рис. 52П.5. Угол α всегда положительный (от 0 до 180 градусов).

189

7. Ввести вектор сил F . Поскольку заданы обычно одна или две силы, то вначале обнуляется весь вектор, число элементов которого равно числу перемещений системы, затем с соответствующим индексом вводятся заданные силы. Все силы прикладываются только в узлах элементов.
8. Ввести характеристики материала (плотность ρ , модуль Юнга E , модуль сдвига G).
9. Ввести геометрические характеристики элементов (длину, размеры и площадь поперечного сечения, осевой момент инерции сечения).
10. Для определения собственных частот колебаний, если есть сосредоточенные массы на раме, их надо задать (только в узлах элементов). Для каждой массы указать три глобальных линейных перемещения (угловые можно не указывать, они не введены в алгоритм решения задачи).
11. Для расчета вынужденных колебаний системы надо задать характер вынуждающей силы $Q(t)$, номер направления nm , по которому она действует, номер перемещения nm , зависимость которого от времени вы хотите увидеть на экране.

Пример 53. Расчет кольца методом конечных элементов

(Программа 53-МКЭ-4-кольцо.mcd)

Метод конечных элементов предназначен для приближенного решения практически любых систем уравнений: алгебраических, дифференциальных, интегральных. Он широко распространен в различных областях знаний: в механике, термодинамике, гидродинамике, газодинамике и т. д., то есть везде, где невозможно найти аналитическое решение проблем.

Но предварительно произвольная система уравнений должна быть преобразована в систему линейных алгебраических уравнений, имеющих матричный вид $F = K \cdot \Delta$. Здесь F — вектор правых частей уравнений, Δ — вектор неизвестных, K — симметричная матрица коэффициентов при неизвестных. Получение такой системы уравнений — очень непростая задача, но она уже решена практически во всех важных прикладных сферах.

В упругой задаче теории упругости уравнение $F = K \cdot \Delta$ представляет собой запись закона Гука в обобщенной форме.

Поясним сущность метода.

- ❑ Упругое тело разбивается на элементы. Объемное тело на тетраэдры или параллелепипеды. Плоское тело — на треугольники и прямоугольники.
- ❑ Для каждого элемента составляется матрица жесткости K с использованием функции формы. Функция формы представляет собой способ аппроксимации неизвестной функции перемещений Δ .
- ❑ Матрицы жесткости элементов объединяются в единую матрицу жесткости для всего тела.
- ❑ Решая систему уравнений $F = K \cdot \Delta$, находят узловые перемещения Δ .
- ❑ С помощью уравнений теории упругости определяются деформации и напряжения в узловых точках тела.

В данном примере решается плоская задача теории упругости. Кольцо, нагруженное двумя силами (рис. 53П.1, *справа*), имеет две оси симметрии, поэтому для повышения точности расчета рассмотрим одну четвертую часть кольца (рис. 53П.2). На осях симметрии должны выполняться граничные условия равенства нулю перемещений, перпендикулярно осям симметрии.

Рассматриваемую четверть кольца разбиваем на треугольные конечные элементы (рис. 53П.1). Треугольный элемент имеет 6 степеней свободы (независимых узловых перемещений). Нумерация узловых перемещений в элементе начинается в нижнем левом узле треугольника и продолжается против часовой стрелки. Горизонтальные перемещения — нечетные, вертикальные — четные. Нумерация узлов всего тела и конечных элементов — по столбцам сверху вниз, слева направо.

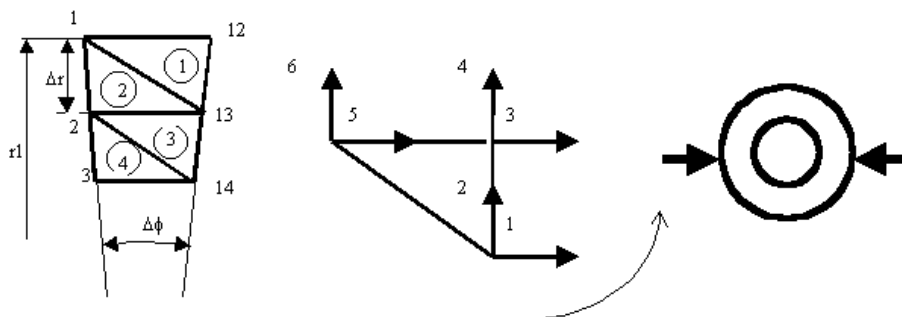


Рис. 53П.1. Схема нагружения и треугольный конечный элемент

В нашем примере всего 66 узлов и 100 конечных элементов. Положение рассчитанных узлов показано на рис. 53П.2, справа.

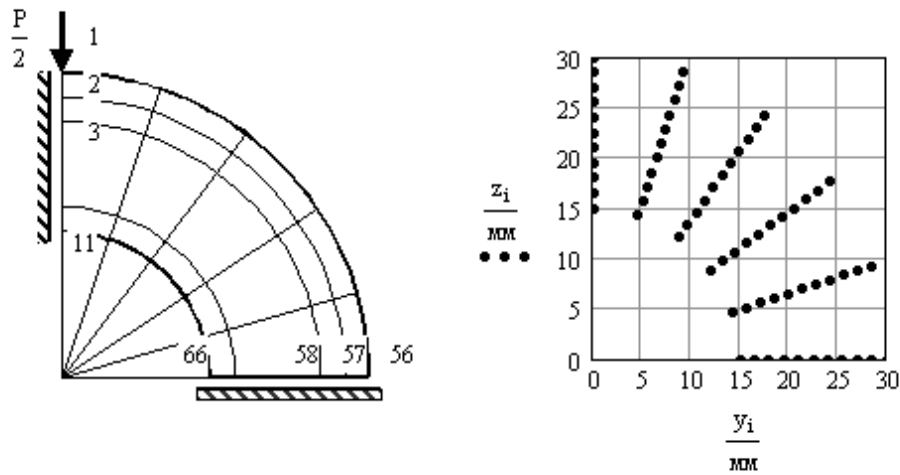


Рис. 53П.2. Расчетная схема и координаты узлов

Размеры рассматриваемой четверти кольца $r1 := 30 \cdot \text{мм}$ наружный радиус кольца $r2 := 15 \cdot \text{мм}$ внутренний радиус кольца $t := 5.7 \cdot \text{мм}$ толщина кольца $\phi1 := 90 \cdot \text{град}$ $\phi2 := 0 \cdot \text{град}$ угол охвата разбиваемой части кольца $Z0 := 0 \cdot \text{мм}$ $Y0 := 0 \cdot \text{мм}$ координаты центра кольца $nr := 11$ число разбиений по радиусу $n\phi := 5$ число разбиений по углу

поменяйте выделенные величины

Вызов функции автоматического разбиения тела на элементы и составления матрицы индексов

Reference: E:\книжки\книга-сопромат\примеры цветные\текст-MK3\маткад\28-Matr-ind1.mod(R)

число узлов $NU = 55$ число узлов в ряду $nr = 11$ число элементов $NE = 80$ число рядов в столбце $n\phi = 5$

Рис. 53П.3. Ввод размеров тела

Размеры элементов могут быть разными (чем меньше элемент, тем выше точность расчетов). Ввод размеров рассматриваемой четверти тела показан на рис. 53П.3.

Координаты узлов можно определить, скажем, по миллиметровке и ввести с клавиатуры. Это кропотливый труд и при большом количестве узлов лучше автоматизировать эту работу. На рисунке 53П.4 приводится расчет полярных координат узлов и их преобразование в прямоугольные (декартовы) координаты с помощью программы 53-Matr-ind. Здесь $r1$ и $r2$ — наружный и внутренний радиусы кольца, t — толщина кольца, $\phi1$ и $\phi2$ — начальное и конечное значения угловой координаты, $Z0$ и $Y0$ — декартовы координаты полюса (начала полярных координат), nr и $n\phi$ — число узлов в столбце (вдоль радиуса) и в ряду (по углу охвата рассматриваемой части тела).

Кропотливой и трудоемкой является также задача составления матрицы индексов. На рисунке 53П.5 приведена вторая часть используемой в примере программы 53-Matr-ind. Там приведен автоматический расчет граничных условий, вычисление номеров перемещений, в которых перемещение на осях симметрии равно нулю, в зависимости от числа узлов.

Автоматизация расчетов координат узлов, матрицы индексов и граничных условий позволяет для данной схемы менять количество узлов. Поменяйте в основном документе количество узлов в ряду nr и в строке $n\phi$.

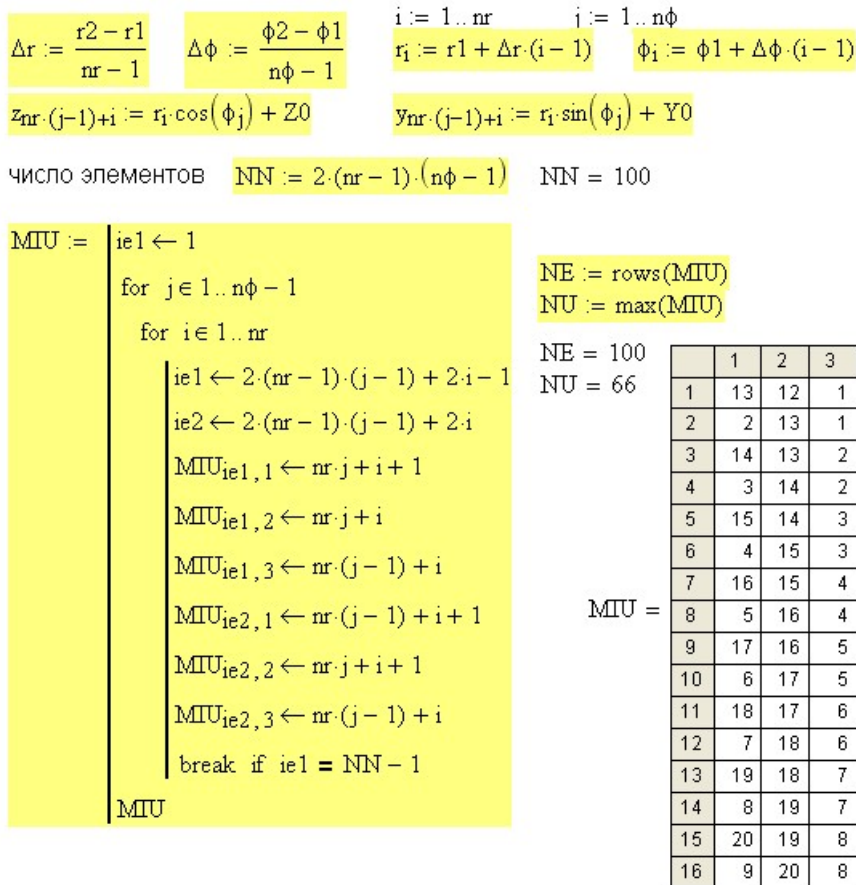


Рис. 53П.4. Программа Matr-ind для расчета матрицы индексов

В данном примере продемонстрирована возможность объединения нескольких Mathcad-документов в один с помощью ссылки на них.

Расчеты координат узлов, матрицы индексов и граничных условий объединены в один документ под названием **53-Matr-ind**. В основном документе делается ссылка на **53-Matr-ind** (рис. М4.3). В результате оба документа объединяются в один и работают совместно, хотя документа **53-Matr-ind** и не видно на экране.

Для создания ссылки надо в главном меню Mathcad выбрать команду **Insert ► Reference** (Вставка ► Ссылка). В открывшемся окне, нажав кнопку **Browse** (Обзор), укажите путь к документу, который хотите включить в расчет. Нажмите кнопку **OK**. В основном документе появится строка (рис. 53П.5) с именем подключенного документа.

При каких-либо изменениях в том или ином документе автоматический пересчет происходит только после сохранения изменений в документах.

В данном примере число узлов в ряду nr и число узлов в строке $n\phi$ заданы в главном документе. Программа **53-Matr-ind** принимает эти значения, вычисляет координаты узлов и матрицу индексов, передает их в главный документ, где эти данные участвуют в последующих расчетах.

ввод граничных условий в перемещениях

$$g := 0 \quad ii := 1..nr \quad g_{ii} := 2 \cdot ii - 1 \quad \Delta g_{ii} := 0 \cdot \text{мм}$$

$$g_{ii+nr} := nr \cdot (n\phi - 1) \cdot 2 + 2 \cdot ii \quad \Delta g_{ii+nr} := 0 \cdot \text{мм}$$

Запись результатов расчета во внешние файлы

$$i := 1..rows(z) \quad j := 1..rows(g) \quad \text{Coord}_{i,1} := i \quad g_{uj,1} := j$$

$$\text{Coord}^{(2)} := y \cdot \frac{1}{\text{мм}} \quad \text{Coord}^{(3)} := z \cdot \frac{1}{\text{мм}} \quad g^{(2)} := g \quad g^{(3)} := \Delta g \cdot \frac{1}{\text{мм}}$$

$$\text{WRITEPRN}("23-Miu") := \text{MIU}$$

$$\text{WRITEPRN}("23-Coord") := \text{Coord}$$

$$\text{WRITEPRN}("23-gu") := g_u$$

Рис. 53П.5. Заключительная часть программы Matr-ind

Программа **53-Matr-ind** может работать и без подключения другой программы. На рисунке 53П.4 надо включить ввод значений nr и $n\phi$, выбрав в контекстном меню команду **Enable Evaluation** (Включить вычисление).

Координаты узлов, матрицу индексов и граничные условия можно записать в отдельные файлы, как это сделано в конце программы 53-Matr-ind (рис. 53П.5). В дальнейшем эти файлы можно считать функцией READPRN и использовать в другом документе. Результаты работы программы 53-Matr-ind показаны на рис. 53П.6.

матрица индексов

$$M_{IU}^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 13 & 2 & 14 & 3 & 15 & 4 & 16 & 5 & 17 & 6 \\ 2 & 12 & 13 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 & 16 & 16 & 17 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{array}$$

координаты узлов

$$z^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 \end{array} \text{ мм}$$

$$y^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 30 & 28.5 & 27 & 25.5 & 24 & 22.5 & 21 & 19.5 & 18 & 16.5 \end{array} \text{ мм}$$

Граничные условия:

номера заданных перемещений

$$g^T = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21 \ 90 \ 92 \ 94 \ 96 \ 98 \ 100 \ 102 \ 104 \ 106 \ 108 \ 110)$$

заданные перемещения

$$\Delta g^T = (0 \ 0) \text{ мм} \quad \text{rows}(\Delta g) = 22$$

Рис. 53П.6. Результаты работы программы Matr-ind

Данный расчет проведен с учетом размерностей, поэтому в начале документа, введены производные размерностей на русском языке. Учет размерностей вносит дополнительные трудности в достаточно сложный расчет, особенно при вводе матриц от размерных величин (рис. 53П.7). Сложно, но можно. Это и демонстрирует данный пример.

В последующих примерах расчет произведен без учета размерностей, а размерности указаны в качестве примечания к вычислениям.

СОВЕТ

При создании сложных программ избегайте учета размерностей. Большое количество дискретных переменных и матриц вызывает много сложностей с применением размерностей. Некоторые встроенные функции вообще не могут работать с размерными величинами. Исчезает главное достоинство Mathcad: удобство и простота использования.

Нецелесообразно изготовление одного документа из двух с помощью ссылки. Если вставляемый документ простой, его лучше вставить копированием и, при желании, скрыть в закрытой зоне (Insert ► Area, Collapse). Если документ сложный, то его взаимодействие с основным документом тоже не простое: возможно переприсвоение переменных, наложение массивов друг на друга.

Удобно передавать данные из одной программы в другую, записывая их в файл и считывая из файла. Однако имейте в виду, что функции READPRN и WRITEPRN не могут работать с размерными переменными.

У каждого треугольного элемента 3 узла и 6 узловых перемещений. Матрица индексов перемещений (матрица связи глобальных номеров узловых перемещений тела с локальными номерами узловых перемещений элементов) получена путем удвоения матрицы на рис. 53П.7.

$$\begin{array}{ll} \text{характеристики материала} & E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} \quad \mu := 0.3 \\ \\ \text{NDS} := 1 & \text{плоское деформированное состояние} \quad \text{NDS} := 0 \quad \text{плоское напряженное состояние} \\ \\ \text{ввод вектора сил} & k := 1..2 \cdot NU \quad F_k := 0 \cdot \text{кН} \quad F_2 := -1 \cdot \text{кН} \\ \text{формирование матрицы индексов перемещений} & \\ \text{по матрице индексов узлов} & k := 1..NE \quad i := 1..3 \\ \\ M_{k,2 \cdot i - 1} := 2 \cdot M_{IU,k,i} & M_{k,2 \cdot i} := 2 \cdot M_{IU,k,i} \end{array}$$

Рис. 53П.7. Вектор сил и матрица индексов перемещений

Матрица жесткости элемента рассчитывается по формуле $K = \int_V B^T \cdot C \cdot B \cdot dV$, где:

194

- $B = D^T N$;
- C — матрица внутренней жесткости, содержащая упругие постоянные материала E , μ , G (рис. 53П.9);
- D — матричный дифференциальный оператор, означающий определенную последовательность присвоения знака дифференцирования;
- N — матрица функций формы.

Для линейного треугольного элемента функция формы — уравнение плоскости

$$N = (a \cdot y + b \cdot z + c) \cdot \frac{1}{2A}, \text{ где:}$$

- $a_i = z_j - z_k$; $b_i = -(y_j - y_k)$; $c_i = y_j \cdot z_k - y_k \cdot z_j$; A — площадь элемента;
- y, z — координаты точки тела, $i, j, k=1, 2, 3$ — номер узла (по правилу круговой перестановки).

$$a(k) := - \begin{pmatrix} z_{\text{MIU}_{k,2}} - z_{\text{MIU}_{k,3}} \\ z_{\text{MIU}_{k,3}} - z_{\text{MIU}_{k,1}} \\ z_{\text{MIU}_{k,1}} - z_{\text{MIU}_{k,2}} \end{pmatrix}$$

$$b(k) := \begin{pmatrix} y_{\text{MIU}_{k,2}} - y_{\text{MIU}_{k,3}} \\ y_{\text{MIU}_{k,3}} - y_{\text{MIU}_{k,1}} \\ y_{\text{MIU}_{k,1}} - y_{\text{MIU}_{k,2}} \end{pmatrix}$$

$$A_k := 0.5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{z_{\text{MIU}_{k,1}}}{m} & \frac{y_{\text{MIU}_{k,1}}}{m} \\ 1 & \frac{z_{\text{MIU}_{k,2}}}{m} & \frac{y_{\text{MIU}_{k,2}}}{m} \\ 1 & \frac{z_{\text{MIU}_{k,3}}}{m} & \frac{y_{\text{MIU}_{k,3}}}{m} \end{vmatrix} \cdot m^2$$

площади
элементов

В контекстном меню выберите
Square Matrix Determinant

$$B_k := \begin{pmatrix} b(k)_1 & 0 & b(k)_2 & 0 & b(k)_3 & 0 \\ 0 & a(k)_1 & 0 & a(k)_2 & 0 & a(k)_3 \\ a(k)_1 & b(k)_1 & a(k)_2 & b(k)_2 & a(k)_3 & b(k)_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot A_k}$$

Рис. 53П.8. Коэффициенты для формирования матрицы жесткости элемента

Производные $\frac{\partial N}{\partial y} = a$ и $\frac{\partial N}{\partial z} = b$, поэтому матрица $B = D^T N$ содержит константы

(рис. 53П.8), которые зависят только от координат узлов.

матрица внутренней жесткости элемента

$$C := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{1-\mu^2} & \text{if NDS} = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2 \cdot (1-\mu)} \end{pmatrix} \cdot E \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)} & \text{if NDS} = 1 \end{cases}$$

$$\text{матрица жесткости элемента } KE_k := B_k^T \cdot C \cdot B_k \cdot A_k \cdot t$$

$$\text{матрица жесткости системы } i := 1..2 \cdot NU \quad j := 1..2 \cdot NU \quad K_{i,j} := 0 \cdot \frac{H}{m}$$

$$i := 1..6 \quad j := 1..6 \quad k := 1..NE \quad K_{\text{MI}_{k,i}, \text{MI}_{k,j}} := K_{\text{MI}_{k,i}, \text{MI}_{k,j}} + (KE_k)_{i,j}$$

Рис. 53П.9. Матрица внутренней жесткости элемента

Матрица внутренней жесткости C приведена на рис. 53П.9 и записана в виде условного оператора — разные матрицы для плоского напряженного $NDS=0$ и плоского деформированного состояния $NDS=1$.

Для треугольного элемента интеграл по объему равен произведению подынтегрального выражения на объем. Формула для расчета матрицы жесткости элемента приведена на рис. 53П.9, внизу.

Матрица жесткости системы (всего тела) формируется с помощью матрицы индексов по той же формуле, что и в матричном методе (примеры 50, 51, 52).

Учет граничных условий сопровождается перестройкой матрицы жесткости системы и вектора сил (рис. 53П.10, сверху).

учет граничных условий в перемещениях $j := 1..2 \cdot NU$ $i := 1..rows(g)$

$$F_j := \text{for } i \in 1..rows(g) \\ F_j \leftarrow F_j - K_{j,g_i} \cdot \Delta g_i$$

$$F_{g_i} := K_{g_i,g_i} \cdot \Delta g_i$$

$$K_{g_i,j} := \begin{cases} K_{g_i,j} & \text{if } g_i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_{j,g_i} := \begin{cases} K_{j,g_i} & \text{if } g_i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Метод Пиано учета граничных условий

$$K_{g_i,g_i} := K_{g_i,g_i} \cdot 10^{10} \quad F_{g_i} := K_{g_i,g_i} \cdot \Delta g_i$$

Выключите один и включите другой
способы учета граничных условий
Результаты не изменятся

определение узловых перемещений

$$\Delta := K^{-1} \cdot F$$

локальные перемещения $i := 1..6$
элементов по столбцам

$$\Delta E_{i,k} := \Delta M_{k,i}$$

определение деформаций и
напряжений в центре элемента

$$\varepsilon E^{(k)} := B_k \cdot \Delta E^{(k)}$$

$$\sigma E^{(k)} := C \cdot \varepsilon E^{(k)}$$

$$\Delta =$$

| | 1 |
|----|------------------------|
| 1 | 0 |
| 2 | $-8.039 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 0 |
| 4 | $-7.798 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 | 0 |
| 6 | $-7.571 \cdot 10^{-3}$ |
| 7 | 0 |
| 8 | $-7.361 \cdot 10^{-3}$ |
| 9 | 0 |
| 10 | $-7.17 \cdot 10^{-3}$ |

мм

Рис. 53П.10. Формирование матрицы жесткости системы и учет граничных условий

Узловые перемещения системы определяются путем обращения матрицы жесткости (рис. 53П.10). При большом количестве уравнений этот способ требует достаточно длительного времени счета. На том же рисунке показано определение напряжений и деформаций средних по площади элемента.

СОВЕТ

Для разреженных ленточных матриц, как в нашем случае, целесообразно использовать метод Холесского, реализованный в программе MCHB, приведенной в примере 55.

Узловые перемещения элементов определяются путем переприсвоения значений перемещений системы по матрице индексов.

По уравнениям теории упругости деформации $\varepsilon = D^T u$, где u — вектор перемещений. По уравнению связи узловых перемещений Δ и перемещений произвольной точки u

$$u = N \cdot \Delta. \quad \text{Отсюда деформация элемента } \varepsilon = (D^T N) \cdot \Delta.$$

По физическим уравнениям теории упругости (закон Гука) напряжения $\sigma = C \cdot \varepsilon$.

Сложность расчета состоит в аккуратном использовании индексов элементов, узлов, столбцов, строк, присвоении индексам значений, взятых из матрицы индексов.

Для треугольного элемента функция формы линейна, поэтому производные от функции формы, а, следовательно, и деформации, и напряжения, найденные на рис. 53П.10 — константы по всей площади элемента.

Напряжения в узлах тела определяются как среднее арифметическое напряжений или деформаций во всех элементах, сходящихся в узле. Расчет напряжений и деформаций в узлах тела приведен на рис. 53П.11.

На том же рисунке показано определение 4-го значения деформации и напряжения в каждом элементе, не учитываемые в матрице внутренней жесткости C . Это ε_x и σ_x .

При плоском напряженном состоянии ($NDS=0$) $\sigma_x = 0$ и $\varepsilon_x = -\mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)$.

При плоском деформированном состоянии ($NDS=1$) $\varepsilon_x = 0$ и $\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z)$.

Работая с Mathcad-документом, опустите выражение $NDS=1$ ниже выражения $NDS=0$ и посмотрите на результаты расчета уже не при плоском напряженном состоянии, а при плоской деформации.

определение средних напряжений и деформаций в узлах
 $k := 1..NE \quad j := 1..3 \quad i := 1..NU \quad j1 := 1..3 \quad \sigma_{j1,i} := 0 \text{ МПа}$

$$\varepsilon_{j1,i} := 0 \quad g_{e1} := 0 \quad g_{e_{MIU_{k,j}}} := g_{e_{MIU_{k,j}}} + 1$$

$$\sigma_{j1,MIU_{k,j}} := \sigma_{j1,MIU_{k,j}} + \sigma_{Ej1,k} \quad \sigma_{j1,i} := \frac{\sigma_{j1,i}}{g_{e1}}$$

$$\varepsilon_{j1,MIU_{k,j}} := \varepsilon_{j1,MIU_{k,j}} + \varepsilon_{Ej1,k} \quad \varepsilon_{j1,i} := \frac{\varepsilon_{j1,i}}{g_{e1}}$$

деформации и напряжения в осевом направлении

угол сдвига вдоль оси x

$$\varepsilon_{4,i} := \varepsilon_{3,i} \quad \varepsilon_{3,i} := \begin{cases} -\mu \cdot (\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}) & \text{if } NDS = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

касательные
напряжения

$$\sigma_{4,i} := \sigma_{3,i} \quad \sigma_{3,i} := \begin{cases} \mu \cdot (\sigma_{1,i} + \sigma_{2,i}) & \text{if } NDS = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

определение интенсивности напряжений и деформаций в узлах

$$\sigma_i := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{1,i} - \sigma_{2,i})^2 + (\sigma_{2,i} - \sigma_{3,i})^2 + (\sigma_{3,i} - \sigma_{1,i})^2 + 6 \cdot (\varepsilon_{4,i})^2}$$

$$\max \sigma_i := \max(\sigma_i) \quad \max \sigma_i = 57.8 \text{ МПа}$$

$$\varepsilon_i := \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{2,i})^2 + (\varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{3,i})^2 + (\varepsilon_{3,i} - \varepsilon_{1,i})^2 + 1.5 \cdot (\varepsilon_{4,i})^2}$$

$$\max \varepsilon_i := \max(\varepsilon_i) \quad \max \varepsilon_i = 0.00024 \quad \sigma_{z_1} := \sigma_{1,i} \quad \sigma_{y_1} := \sigma_{2,i}$$

Рис. 53П.11. Определение перемещений узлов тела, напряжений и деформаций в центре каждого элемента

Для оценки прочности детали необходимо найти максимальное значение интенсивности напряжений. Его определение показано на рис. 53П.11 внизу.

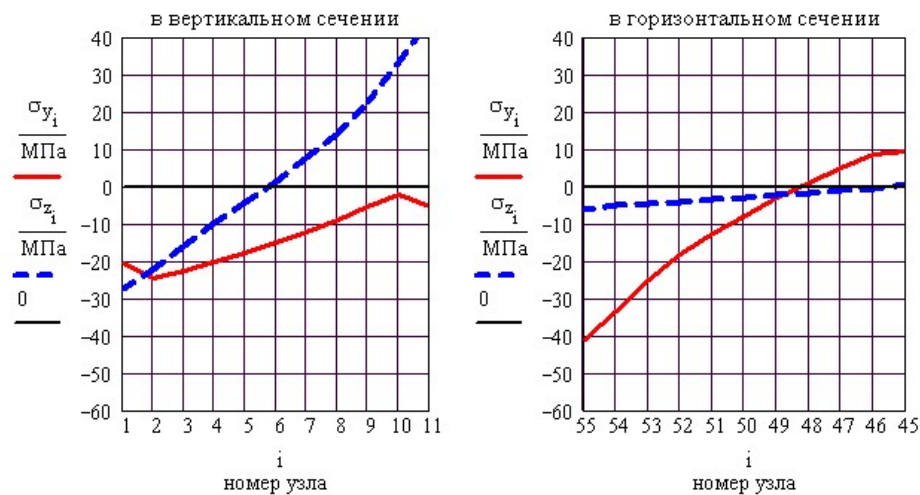


Рис. 53П.12. Результаты расчета

Результаты расчета, приведенные на рис. 53П.12, практически совпадают с результатами расчета кольца методом сил с использованием формулы для напряжений в кривом брус. Максимальные напряжения возникают на внутренней поверхности кольца в 11-м и 66-м узлах.

Пример 54. Решение уравнения Пуассона при кручении стержня

(Программа 54-МКЭ-5-Пуассон.mcd)

В данном примере рассматривается решение уравнения Пуассона методом конечных элементов для областей произвольной формы и произвольной разбивки на элементы. Распределение касательных напряжений при кручении стержня произвольного сечения подчиняется уравнению Пуассона.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2G\theta = 0.$$

Здесь

- G — модуль сдвига,
- $\theta = \frac{M_k}{GJ_k}$ — относительный угол закручивания стержня;
- φ — функция напряжений, такая, что $\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и $\tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$,
- M_k — крутящий момент,
- J_k — момент инерции при кручении.

Форма сечения закрученного стержня может быть любой. Для примера взят стержень прямоугольного сечения с вырезом (рис. 54П.1). Исходные данные для расчета считаны из внешних файлов с помощью функции READPRN (рис. 54П.2). Вместо крутящего момента задаемся относительным углом поворота $\theta = 1$ град.

Разбиение сечения на треугольные элементы и формирование матрицы индексов полностью аналогично приведенному в примере 53-МКЭ-4-кольцо. Координаты узлов (вершин треугольных элементов) показаны на рис. 54П.1, справа. Данный пример решаем без учета размерностей.

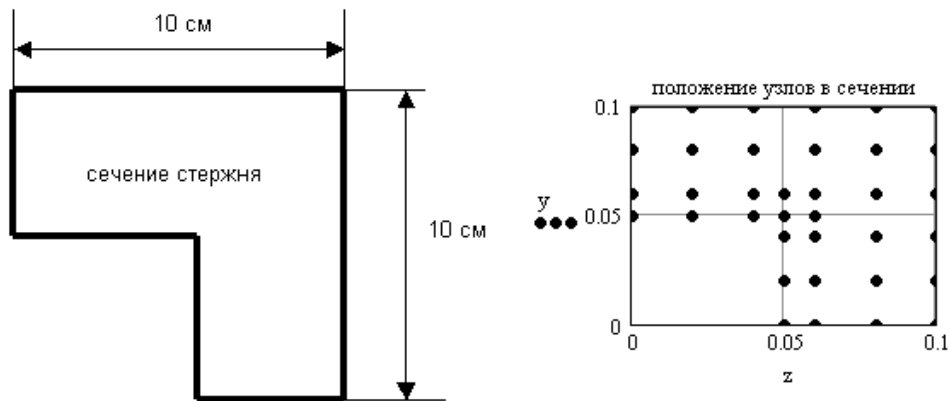


Рис. 54П.1 Поперечное сечение стержня

Для решения методом конечных элементов исходное уравнение Пуассона сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$P = K \cdot \Phi, \text{ где:}$$

- P — вектор правых частей уравнения Пуассона;
- K — матрица жесткости;
- Φ — неизвестный пока вектор узловых значений функции напряжений φ .

В отличие от плоской задачи теории упругости, где в каждом узле было два неизвестных перемещения, при решении уравнения Пуассона в каждом узле одно неизвестное значение функции напряжений. Соответственно, матрица индексов в примере 53-МКЭ4-кольцо содержала 6 столбцов, а в нашем примере только 3 столбца.

Сечение разбиваем на треугольные элементы.

ввод координат узлов Y и Z в мм

```
aa := READPRN("MKЭ5-coord.txt")  z := aa<3>  y := aa<2>
z := z/100  y := y/100  перевод координат из см в м
```

ввод матрицы индексов

MIU := READPRN("MKЭ5-Miu.txt")

узлов

MIU := submatrix(MIU, 1, rows(MIU), 2, cols(MIU))

число узлов NU := max(MIU) NU = 36

число элементов NE := rows(MIU) NE = 48

ввод граничных условий (узлы на контуре, где $\Phi=0$)

g2 := READPRN("MKЭ5-gran.txt") g := g2<1> Ng := rows(g)

$g^T = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 8 \ 12 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 24 \ 30 \ 36 \ 35 \ 34 \ 33 \ 32 \ 31 \ 25 \ 18 \ 9 \ 5)$

Рассмотрим решение уравнения Пуассона для $\theta=1$ градус

$\theta := 1 \cdot \frac{\pi}{180}$ G := $8 \cdot 10^{10}$

Рис. 54П.2. Исходные данные для расчета

Матрицу жесткости треугольного элемента определяем по формуле

$$K_{i,j}^e = \frac{1}{4F^e} (a_i a_j + b_i b_j), \text{ где:}$$

- F^e — площадь элемента, a и b — функции координат узлов y и z ;
- $a_i = z_j - z_k$ и $b_i = -(y_j - y_k)$,
- $i, j, k = 1, 2, 3$ — локальные номера узлов треугольного элемента.

Формирование матрицы жесткости треугольного элемента показано на рис. М5.3.

k := 1..NE i := 1..NU j := 1..NU

$$a(k) := \begin{bmatrix} (-z)_{MIU_{k,2}} + z_{MIU_{k,3}} \\ (-z)_{MIU_{k,3}} + z_{MIU_{k,1}} \\ (-z)_{MIU_{k,1}} + z_{MIU_{k,2}} \end{bmatrix} \quad b(k) := \begin{bmatrix} y_{MIU_{k,2}} - y_{MIU_{k,3}} \\ y_{MIU_{k,3}} - y_{MIU_{k,1}} \\ y_{MIU_{k,1}} - y_{MIU_{k,2}} \end{bmatrix}$$

$$A_k := 0.5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{MIU_{k,1}} & y_{MIU_{k,1}} \\ 1 & z_{MIU_{k,2}} & y_{MIU_{k,2}} \\ 1 & z_{MIU_{k,3}} & y_{MIU_{k,3}} \end{bmatrix}$$

В контекстном меню выберите Square Matrix Determinant

Площади элементов

матрица жесткости элемента

$$KE(k) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..3 \\ \quad \text{for } j \in 1..3 \\ \quad \quad K_{i,j} \leftarrow \frac{1}{4 \cdot A_k} \cdot (a(k)_i \cdot a(k)_j + b(k)_i \cdot b(k)_j) \end{array}$$

Рис. 54П.3. Формирование матрицы жесткости треугольного элемента

Матрица жесткости всего сечения получается, как и во всех предыдущих примерах, путем суммирования коэффициентов жесткости элементов по матрице индексов.

Граничные условия, введены простейшим способом, используя принцип Пиано. Чтобы приравнять нулю значение функции напряжений на границе контура сечения стержня в узле j , надо в матрице жесткости системы соответствующий коэффициент жесткости, стоящий на главной диагонали матрицы K_{jj} , умножить на большое число (в нашем примере — на 10^6).

Вектор правых частей уравнения Пуассона P формируется по матрице индексов, как сумма правых частей уравнения Пуассона для отдельных элементов, которые одинаковы для всех элементов (рис. 54П.4)

$$P^e = \frac{2}{3} \theta G F^e \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

матрица жесткости системы

$k := 1..NE$ $i := 1..NU$ $j := 1..NU$ $K_{i,j} := 0$ обнуление матрицы K

Суммирование коэффициентов жесткости по матрице индексов

$i := 1..3$ $j := 1..3$ $K_{MIU_k,i, MIU_k,j} := K_{MIU_k,i, MIU_k,j} + KE(k)_{i,j}$

учет граничных условий (принцип Пиано) на контуре $\Phi=0$

$i1 := 1..Ng$ $K_{(g_{i1}), g_{i1}} := K_{(g_{i1}), g_{i1}} \cdot 10^6$

ввод вектора правых частей

$k := 1..NE$ $PE := \frac{2}{3} \cdot G \cdot \theta \cdot A$

$j := 1..NU$ $P_j := 0$ $P_{MIU_k,i} := P_{MIU_k,i} + PE_k$

Смените условие задачи: действие точечного заряда (источника тепла). Включите следующие 2 выражения

$P_j := 0$ обнуление вектора правых частей

$P_{14} := 100$ точечный заряд в узле 14 (поменяйте номер узла)

Рис. 54П.4. Формирование матрицы жесткости системы и вектора правых частей

определение узловых значений функции напряжений $\Phi := K^{-1} \cdot P$

тоже для элемента k $i := 1..3$ $\Phi E_{i,k} := \Phi_{MIU_k,i}$

касательные напряжения средние по площади элемента

$\tau E_{xy_k} := \frac{1}{2 \cdot A_k} \cdot (b(k) \cdot \Phi E^{(k)})$ $\tau E_{xz_k} := \frac{-1}{2 \cdot A_k} \cdot (a(k) \cdot \Phi E^{(k)})$

определение касательных напряжений в узлах

$k := 1..NE$ $j := 1..3$ $i := 1..NU$ $\tau_{xy_1} := 0$ $\tau_{xz_1} := 0$
счетчик элементов, сходящихся в узлах $ge_1 := 0$ $ge_{MIU_k,j} := ge_{MIU_k,j} + 1$

касательные напряжения в узлах

$\tau_{xy_{MIU_k,j}} := \tau_{xy_{MIU_k,j}} + \tau E_{xy_k}$ $\tau_{xz_{MIU_k,j}} := \tau_{xz_{MIU_k,j}} + \tau E_{xz_k}$

$\tau_{xy_1} := \frac{\tau_{xy_1}}{ge_1}$ $\tau_{xz_1} := \frac{\tau_{xz_1}}{ge_1}$ $\tau_1 := \sqrt{(\tau_{xy_1})^2 + (\tau_{xz_1})^2} \cdot 10^{-6}$ МПа

$\tau_{max} := \max(\tau)$ $\tau_{max} = 63.5$ МПа $\gamma := \frac{\tau}{\tau_{max}}$

Рис. 54П.5. Определение функции напряжений и касательных напряжений

Используя зависимости $\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ и $\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$, определяем касательные напряжения

средние по площади элементов. Касательные напряжения в узлах сечения стержня определяем как среднее арифметическое касательных напряжений во всех элементах, сходящихся в рассматриваемом узле (рис. 54П.5). Относительные касательные

напряжения в узлах определяются как отношение $\gamma = \frac{\tau}{\tau_{max}}$.

Крутящий момент в сечении стержня, вызванный относительным углом поворота $\theta = 1$ град, определяется как удвоенный объем, охватываемый поверхностью функции напряжений Φ .

$$M_k = \int_F \phi dF.$$

Расчетная формула для M_k приведена на рис. 54П.6. Там же, исходя из обычных формул сопротивления материалов, определены геометрические характеристики сечения: момент инерции при кручении J_k и момент сопротивления при кручении W_k .

крутящий момент

$$M_k := \frac{2}{3} \cdot \sum_{k=1}^{NE} [A_k \cdot (\Phi E_{1,k} + \Phi E_{2,k} + \Phi E_{3,k})]$$

Если рассматриваем
половину сечения, $M_k = 2 \cdot M_k$

$$M_k := 2 \cdot M_k$$

$$M_k = \blacksquare$$

отключено, так как сечение
несимметричное

момент инерции

$$J_k := \frac{M_k}{G \cdot \theta} \cdot 10^8$$

$$J_k = 400 \text{ см}^4$$

момент сопротивления

$$W_k := \frac{M_k}{\tau_{\max}}$$

$$W_k = 88.012 \text{ см}^3$$

Рис. 54П.6. Определение крутящего момента и геометрических характеристик сечения стержня

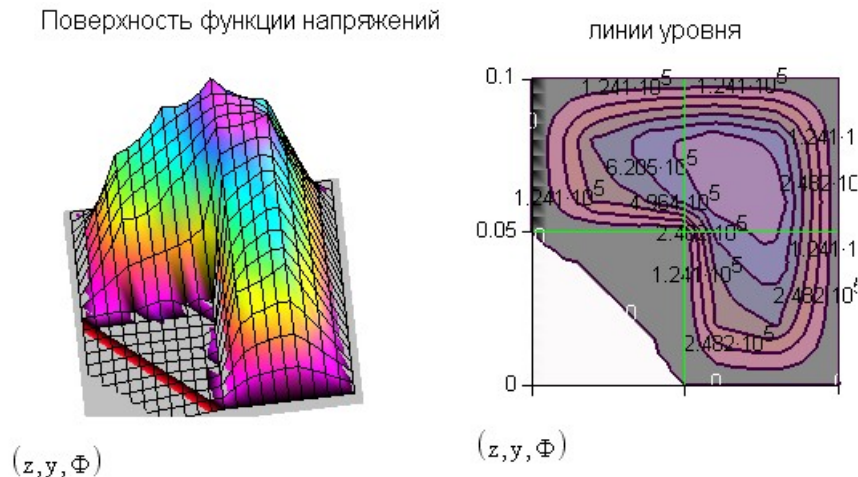


Рис. 54П.7. Поверхность функции напряжений

Поверхность, образованная функцией напряжений показана на рис. 54П.7. Там же построен график линий уровня. Поскольку касательные напряжения — это тангенс угла наклона касательной к поверхности напряжений, чем круче склон, тем больше напряжение. Максимальные касательные напряжения возникают вблизи вершины выреза.

Кроме задачи кручения стержня произвольного сечения, метод конечных элементов применяется для решения уравнения Пуассона в других областях знаний.

Рассмотренная программа может использоваться и при иных значениях правых частей уравнения Пуассона и других граничных условиях.

В нашем примере значения вектора правых частей были одинаковы для всех узловых точек. Измените условие задачи, положив значения $P=0$ для всех узлов, кроме одного (любого) или нескольких. Сечение закройте, положив на всех сторонах сечения $\Phi=0$. Необходимые для этого выражения уже введены в документ (рис. 54П.4), но они отключены. Чтобы включить их, выделите одновременно все 4 отключенных выражения и щелкните правой кнопкой мыши. В открывшемся контекстном меню выберите пункт **Enable Evaluation** (Разрешить вычисление). Будет выполнен расчет для новых условий задачи.

Пример 55. Решение плоской упругопластической задачи методом конечных элементов

(Программа 55-МКЭ-6-пласт.mcd)

Данный пример иллюстрирует возможность и удобство программирования на Mathcad любой сколь угодно сложной задачи.

В качестве примера для расчета взято кольцо, сжимаемое двумя силами, которое было рассчитано при упругой деформации в примере 53.

Исходные данные для расчета были подготовлены в программе 53-Matr-ind и записаны во внешние файлы, откуда считаны с помощью функции READPRN (рис. 55П.1).

В примере 53 для ввода данных и их корректировки использовалось включение программы 53-Matr-ind в основной документ с помощью ссылки (Reference). В этом примере для корректировки данных используется гиперссылка (Hyperlink).

Гиперссылка позволяет открывать файл, с которым создана связь, в той оболочке, которой он создан. Рассмотрим процедуру создания гиперссылки.

- ❑ Выделить слово, с которым будет связан, интересующий вас файл, причем желательно черным цветом. Тогда после установления связи выделенное слово будет выделено жирным шрифтом.
- ❑ В главном меню Mathcad выбрать команду **Insert** ► **Hyperlink** (Вставка ► Гиперссылка). Щелкнуть на кнопке **Browse** (Обзор) и указать путь к файлу, с которым надо связать выделенное слово. Щелкнуть на кнопке **OK**.

Двойной щелчок мышью на выделенном слове открывает файл, с которым установлена связь. Теперь этот файл можно отредактировать и сохранить. Для передачи данных в Mathcad-документ их надо внутри связанного файла записать в виде прямоугольной матрицы или вектора в отдельный внешний файл, откуда затем считать функцией READPRN.

| Matr-ind | coord | Miuf | gu | ссылки |
|------------------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------------|--------|
| Ввод координат в мм | расчет в системе Си | | | |
| coord := READPRN("МКЭ6-Coord.prm") | | y := coord ⁽²⁾ | z := coord ⁽³⁾ | |
| MTU := READPRN("МКЭ6-Miuf.prm") | | | | |
| число узлов | NU := max(MTU) | NU = 66 | | |
| число элементов | NE := rows(MTU) | NE = 100 | | |
| толщина кольца | t := 0.005 м | y := y·0.001 | z := z·0.001 | |

Рис. 55П.1. Ввод исходных данных для расчета

Рассмотренная задача состоит как бы из двух частей. Вначале решается упругая задача и определяются нагрузки, перемещения, напряжения и деформации, соответствующие предельному упругому состоянию системы, то есть появлению текучести в самом нагруженном элементе. На этом этапе каждое выражение используется только один раз, поэтому в данной части документа нет подпрограмм.

Первая часть документа (упругий расчет) полностью аналогична программе, приведенной в примере 53, и здесь иллюстрируется рис. 55П.2 – 55П.6.

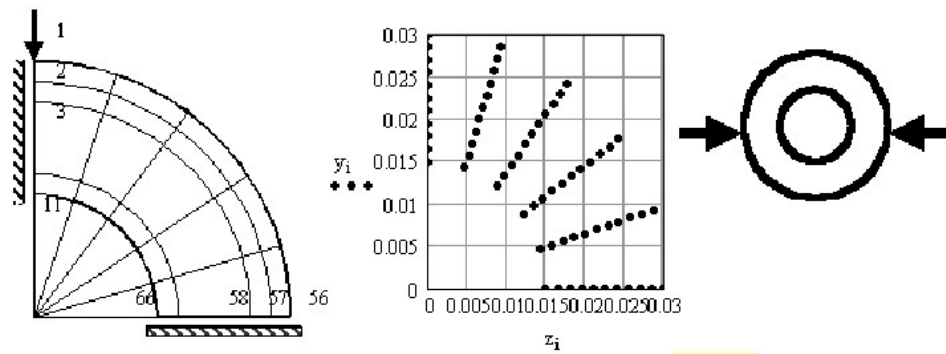


Рис. 55П.2. Расчетная схема кольца под нагрузкой

На рисунке 55П.2 приведена схема кольца под нагрузкой, схема разбивки на треугольные конечные элементы и положение узлов аналогично рис. 53П.1 и 53П.2.

На рисунке 55П.3 вводятся характеристики материала: модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ , предел текучести σ_T и соответствующая ему упругая деформация ε_T .

Далее вводится вектор сил и граничные условия (равенство нулю перемещения на осях симметрии)

По матрице индексов узлов формируется матрица индексов перемещений.

Введен код **NDS** для расчета тонких колец (плоское напряженное состояние $NDS=0$) и толстых колец (плоская деформация $NDS=1$).

На рисунках М6.4 – М6.6 описано формирование матрицы жесткости системы. Этот расчет практически аналогичен приведенному в примере 53 на рис. 53П.7 – 53П.10.

Матрица внутренней жесткости элемента для экономии места в последующих подпрограммах оформлена также в виде подпрограммы (рис. 55П.5).

```

характеристики материала   $E := 2 \cdot 10^{11}$        $\mu := 0.3$        $\sigma_T := 300 \cdot 10^6$        $\varepsilon_T := \frac{\sigma_T}{E}$ 

NDS := 1   плоское деформированное состояние
NDS := 0   плоское напряженное состояние

ввод вектора сил       $k := 1 \dots 2 \cdot NU$        $F_k := 0$        $F_2 := -1000$ 

формирование матрицы индексов перемещений
по матрице индексов узлов       $k := 1 \dots NE$        $i := 1 \dots 3$ 

       $MI_{k,2 \cdot i - 1} := 2 \cdot MTU_{k,i} - 1$        $MI_{k,2 \cdot i} := 2 \cdot MTU_{k,i}$ 

ввод граничных условий в перемещениях
(на осях симметрии одно из перемещений равно нулю)

 $g2 := \text{READPRN}("MK\text{Э}6\text{-gu.prm"})$ 

номера заданных перемещений       $g := g2^{(2)}$ 
заданные перемещения       $\Delta g := g2^{(3)}$ 

 $g^T = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 15 \ 17 \ 19 \ 21 \ 112 \ 114 \ 116 \ 118 \ 120 \ 122 \ 124 \ 126 \ 128 \ 130 \ 132)$ 

 $\Delta g^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ 

```

Рис. 55П.3. Продолжение подготовки исходных данных для расчета

$$a(k) := - \begin{pmatrix} z_{MIU_k,2} - z_{MIU_k,3} \\ z_{MIU_k,3} - z_{MIU_k,1} \\ z_{MIU_k,1} - z_{MIU_k,2} \end{pmatrix} \quad b(k) := \begin{pmatrix} y_{MIU_k,2} - y_{MIU_k,3} \\ y_{MIU_k,3} - y_{MIU_k,1} \\ y_{MIU_k,1} - y_{MIU_k,2} \end{pmatrix}$$

площади элементов $A_k := 0.5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & z_{MIU_k,1} & y_{MIU_k,1} \\ 1 & z_{MIU_k,2} & y_{MIU_k,2} \\ 1 & z_{MIU_k,3} & y_{MIU_k,3} \end{vmatrix}$ В контекстном меню выберите Square Matrix Determinant

$$B_k := \begin{pmatrix} b(k)_1 & 0 & b(k)_2 & 0 & b(k)_3 & 0 \\ 0 & a(k)_1 & 0 & a(k)_2 & 0 & a(k)_3 \\ a(k)_1 & b(k)_1 & a(k)_2 & b(k)_2 & a(k)_3 & b(k)_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \cdot A_k}$$

Рис. 55II.4. Подготовка к расчету матрицы жесткости

матрица внутренней жесткости элемента

$$C(E, \mu) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{1-\mu^2} & \text{if } NDS = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} & \text{if } NDS = 1 \end{cases}$$

Рис. 55II.5. Матрица внутренней жесткости элемента

матрица жесткости элемента $KE_k := B_k^T \cdot C(E, \mu) \cdot B_k \cdot A_k \cdot t$

матрица жесткости системы $i := 1..2 \cdot NU \quad j := 1..2 \cdot NU \quad K_{i,j} := 0$
 $i := 1..6 \quad j := 1..6 \quad k := 1..NE \quad K_{MI_k,i, MI_k,j} := K_{MI_k,i, MI_k,j} + (KE_k)_{i,j}$

Рис. 55II.6. Формирование матрицы жесткости

Вторая часть документа — упругопластический расчет — выполняется итерационным методом, повторяется многократно и оформлена в виде программы. Эта часть состоит из ряда подпрограмм и головной программы, определяющей порядок расчета.

Для решения упругопластической задачи использован метод переменных параметров упругости.

Основное уравнение метода конечных элементов имеет вид

$$F = K \cdot \Delta,$$

где F — вектор сил, K — матрица жесткости, Δ — неизвестные перемещения системы.

Существуют два основных подхода к решению упругопластических задач:

1. на каждой итерации перестраивать матрицу жесткости;
2. на каждой итерации перестраивать вектор сил.

Каждому подходу соответствуют свои методы решения.

Метод переменных параметров упругости

Этот метод основан на перестроении матрицы жесткости на каждой итерации. Многократно решается упругая задача, но параметры упругости в каждом элементе на каждой итерации различные.

Физические уравнения деформационной теории пластичности

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{E}(\sigma_i - \mu\sigma_j - \mu\sigma_k) + \frac{2}{3}\lambda(\sigma_i - \frac{\sigma_j}{2} - \frac{\sigma_k}{2}),$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}}{G} + 2\lambda\tau_{i,j}$$

где $i, j, k = x, y, z$ по правилу круговой перестановки, $\lambda = \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E}\right)$ — функция

пластичности, E — модуль Юнга, $E_c = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\sigma}}$ — секущий модуль упругости, $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\sigma}$ —

интенсивности деформаций и напряжений (формулы для их определения приведены на рис. 55П.9).

В методе переменных параметров упругости физические уравнения теории пластичности заменяются физическими уравнениями теории упругости

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{E^*}(\sigma_i - \mu^*\sigma_j - \mu^*\sigma_k)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}}{G^*}$$

где E^*, μ^*, G^* — переменные параметры упругости (формулы для их определения приведены на рис. 55П.10).

Рассмотрим сущность метода переменных параметров упругости.

- При заданной нагрузке F методом конечных элементов определяются упругие перемещения Δ , деформации и напряжения ε и σ , их интенсивности $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\sigma}$.
- Для элементов, в которых появляются пластические деформации $\varepsilon > \varepsilon_t$, где ε_t — деформация начала текучести, определяют новые параметры упругости E^*, μ^*, G^* (рис. 55П.10), с учетом их пересчитывают матрицу внутренней жесткости элемента C и матрицу жесткости элемента K (рис. 55П.10 и 55П.11), а также матрицу жесткости всей системы по матрице индексов.
- Вновь решается основное уравнения $F = K \cdot \Delta$, определяются новые значения $\varepsilon, \Delta, \sigma, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}$ второго приближения и вновь уточняются упругие константы E^*, μ^*, G^* и т. д. Процесс повторяется до выполнения критерия сходимости.

учет граничных условий в перемещениях

```

GU(K,F,g,Δg) :=
  n ← rows(g)
  for i ∈ 1..n
    for j ∈ 1..2·NU
      Kgi,j ← Kgi,j if gi = j
      0 otherwise
      Kj,gi ← Kj,gi if gi = j
      0 otherwise
      Fj ← Kj,gi·Δgi if gi = j
      Fj - Kj,gi·Δgi otherwise
    (K)
    (F)

```

Метод Пиано учета граничных условий

```

GU(K,F,g,Δg) :=
  n ← rows(g)
  for i ∈ 1..rows(g)
    Kgi,gi ← Kgi,gi · 1010
    Fgi ← Kgi,gi·Δgi + F(gi)
  (K)
  (F)

```

Перестроение матрицы жесткости и вектора сил с учетом граничных условий

$K := GU(K,F,g,Δg)_1$

$F := GU(K,F,g,Δg)_2$

Выключите один и включите другой способы учета граничных условий Результаты не изменятся

Рис. 55П.7. Подпрограмма учета граничных условий

Программа решения упруго-пластической задачи

Рассмотрим представленную программу расчета.

Начало программы представляет собой почти копию примера 53 — упругий расчет кольца методом конечных элементов. Заканчивается он определением напряжений и деформаций при заданной нагрузке (рис. 55П.13). Там же с помощью поправочного коэффициента определяются нагрузки, перемещения, напряжения и деформации, соответствующие появлению текучести в кольце.

Расчеты в пластической области, выполняемые многократно, оформлены в виде головной программы (рис. 55П.14), описывающей порядок расчета и вызывающей в нужный момент необходимую подпрограмму.

В начале головной программы переприсваиваются значения переменных, используемых в программе. Если имя переменной уже было использовано в основном документе выше программы, без переприсвоения значения эта переменная становится константой.

В процессе разработки программы на всякий случай переприсвойте значения большинству переменных. Затем методом проб вырезайте по одному присвоенные значения и смотрите, изменяются ли результаты расчета. В противном случае очень трудно отыскать ошибку. Вроде бы все просто и все правильно, а результат не тот, который должен быть.

Опорная конструкция программы цикл **while** — повторять итерации до выполнения критерия сходимости. Далее описывается содержание итерации.

Определение узловых перемещений системы с использованием подпрограммы **МСНВ**. Это подпрограмма решения системы линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей коэффициентов. Чтобы не загромождать документ, эта подпрограмма скрыта в закрытой зоне (рис. 55П.13). Двойной щелчок мышью на линии, за которой спрятана подпрограмма, вызывает ее на экран дисплея.

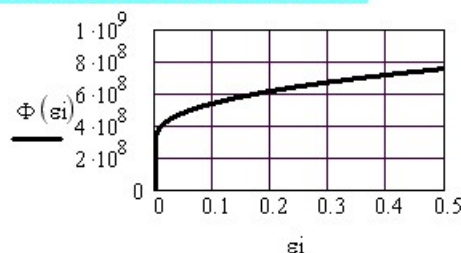
Подпрограмма **МСНВ** требует задания ширины ленты **ЖН** матрицы коэффициентов. Ширина ленты определена с помощью программы-выражения **ЖН** (рис. 55П.8), хотя в данном случае необходимости в составлении программы нет. Ведь **ЖН** определяется один раз и входящие в программу выражения можно просто записать в строку с использованием дискретной переменной.

На том же рисунке 55П. 8 записано уравнение диаграммы деформирования. Выбрана степенная аппроксимация диаграммы деформирования, приведенной в примере **diag**.

Диаграмма деформирования

$$\Phi(\varepsilon_i) := \begin{cases} E \cdot \varepsilon_i & \text{if } \varepsilon_i < \varepsilon_T \\ \sigma_T + 6 \cdot 10^8 \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_T)^{0.4} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Поменяйте показатели степени



ширина ленты

$$\text{ЖН} := \begin{cases} \text{for } k \in 1 \dots \text{NE} \\ \quad \text{MK} \leftarrow (\text{MT})^{(k)} \\ \quad \text{M1} \leftarrow \max(\text{MK}) \\ \quad \text{M2} \leftarrow \min(\text{MK}) \\ \quad \text{ЖН1}_k \leftarrow \text{M1} - \text{M2} \\ \quad \text{ЖН} \leftarrow \max(\text{ЖН1}) \end{cases}$$

$$\text{ЖН} = 25$$

Рис. 55П.8. Ввод уравнения диаграммы деформирования и определение ширины ленты матрицы жесткости системы

Интенсивности напряжений и деформаций

$$\text{int}\sigma(\sigma) := \begin{cases} \text{for } k \in 1 \dots \text{NE} \\ \quad \sigma_{ik} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{1,k} - \sigma_{2,k})^2 + (\sigma_{2,k} - \sigma_{3,k})^2 + (\sigma_{3,k} - \sigma_{1,k})^2 + 6 \cdot (\sigma_{4,k})^2} \\ \quad \sigma_i \end{cases}$$

$$\text{int}\varepsilon(\varepsilon) := \begin{cases} \text{for } k \in 1 \dots \text{NE} \\ \quad \varepsilon_{ik} \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{1,k} - \varepsilon_{2,k})^2 + (\varepsilon_{2,k} - \varepsilon_{3,k})^2 + (\varepsilon_{3,k} - \varepsilon_{1,k})^2 + 1.5 \cdot (\varepsilon_{4,k})^2} \\ \quad \varepsilon_i \end{cases}$$

Рис. 55П.9. Функции расчета интенсивностей напряжений и деформаций

Затем происходит *определение напряжений и деформаций*, средних по площади элемента на данной итерации с помощью подпрограммы **З1** (рис. 55П.12). Подпрограмма начинается с присвоения узловым перемещениям треугольного элемента ΔE значений узловых перемещений системы Δ с помощью матрицы индексов. Затем определяются деформации элементов ε и напряжения σ . На первой итерации все напряжения считаются упругими. Для всех элементов признак пластичности **k1=0**. Используется упругая матрица внутренней жесткости элемента, содержащая исходные модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ материала кольца (в примере стального).

При последующих итерациях для пластически деформированных элементов (**k1=1**) вызывается подпрограмма **СС** перестроения матрицы внутренней жесткости элемента (рис. 55П.11), внутри которой вызывается подпрограмма $E\mu$ определения

переменных параметров упругости и функция $C(E, \mu)$ создания матрицы внутренней жесткости. Матрица внутренней жесткости связывает напряжения и деформации в законе Гука $\sigma = C \cdot \varepsilon$.

определение переменных параметров упругости

```

 $E\mu(\varepsilon_i) :=$ 

$$\begin{aligned} E_c &\leftarrow \frac{\Phi(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} \\ a &\leftarrow \frac{1 - 2 \cdot \mu}{3} \cdot \frac{E_c}{E} \\ \mu_c &\leftarrow \frac{1 - 2 \cdot a}{2 + 2 \cdot a} \\ E_c &\leftarrow \frac{E_c}{1 + a} \\ G_c &\leftarrow \frac{E_c}{2 \cdot (1 + \mu_c)} \\ &\begin{pmatrix} E_c \\ \mu_c \\ G_c \end{pmatrix} \end{aligned}$$


```

перестроение матрицы внутренней жесткости элемента

```

 $CC(\varepsilon_i) :=$ 

$$\begin{aligned} E_{c\mu c} &\leftarrow E\mu(\varepsilon_i) \\ E &\leftarrow E_{c\mu c1} \\ \mu &\leftarrow E_{c\mu c2} \\ G &\leftarrow E_{c\mu c3} \\ C1 &\leftarrow C(E, \mu) \\ &(C1 \ E \ \mu)^T \end{aligned}$$


```

Рис. 55П.10. Расчет переменных параметров упругости

```

 $K_p(\varepsilon_i, k1) :=$ 

$$\begin{aligned} K &\leftarrow K \\ \text{for } k \in 1 \dots NE \\ &\quad \text{continue if } k1_k = 0 \\ &\quad \varepsilon_{i1} \leftarrow \varepsilon_{ik} \\ &\quad C_p \leftarrow CC(\varepsilon_{i1})_1 \\ &\quad KE1 \leftarrow B_k^T \cdot C_p \cdot B_k \cdot A_k \cdot t \\ &\quad \text{for } i \in 1 \dots 6 \\ &\quad \quad \text{for } j \in 1 \dots 6 \\ &\quad \quad \quad K_{MI_{k,i}, MI_{k,j}} \leftarrow K_{MI_{k,i}, MI_{k,j}} \dots \\ &\quad \quad \quad \quad + KE1_{i,j} - (KE_k)_{i,j} \\ &\quad K \end{aligned}$$


```

Рис. 55П.11. Перестроение матрицы жесткости системы

Подпрограмма **Z1** заканчивается определением напряжений и деформаций вдоль оси **Z**.

При плоском напряженном состоянии **NDS=0** $\sigma_z = 0$ и $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.

При плоской деформации **NDS=1** $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ и $\varepsilon_z = 0$.

Обратите внимание, что передача данных в подпрограммы происходит через параметры имени функции, как принято во всех языках программирования, а вывод результатов расчета через составной массив (столбец, строку или прямоугольную матрицу). Если выводимых параметров мало, можно использовать и столбец, а если много — лучше строку для экономии места в документе.

В головной программе (рис. 55П.14) подпрограмма **Z1** вызывается один раз для экономии времени расчета, а затем найденные значения **Z1** присваиваются напряжениям $\sigma \leftarrow Z1_2$ и деформациям $\varepsilon \leftarrow Z1_1$.

Далее определяются интенсивности напряжений и деформаций с помощью функций **int σ** и **int ε** (см. рис. 55П.9).

- По интенсивности напряжений элементам присваивается признак пластичности **k1=0**, если $\tilde{\sigma} < \sigma_T$ и **k1=1**, если $\tilde{\sigma} > \sigma_T$.
- Для пластически деформированных элементов пересчитывается матрица жесткости **K** с помощью подпрограммы **K_p** (рис. 55П.11), внутри которой пересчитывается матрица внутренней жесткости **C** (подпрограмма **CC**), для чего в свою очередь пересчитываются параметры упругости (подпрограмма **Eμ**).

- Перед переходом к следующей итерации оценивается критерий завершения расчета Eps , представляющий собой отношение усредненных перемещений в предыдущей итерации $\Delta 1$ и в текущей итерации Δ (рис. 55П.13, внизу).

207

Если Eps больше заданной расчетчиком величины, происходит переход к следующей итерации.

```

Z1( $\Delta$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $k1$ ) := for k  $\in$  1..NE
  for i  $\in$  1..6
     $\Delta E_i \leftarrow \Delta M I_{k,i}$ 
     $\varepsilon^{(k)} \leftarrow B_k \cdot \Delta E$ 
     $C_p \leftarrow \begin{cases} C(E, \mu) & \text{if } k1_k = 0 \\ \text{otherwise} \\ \begin{cases} \varepsilon_{i1} \leftarrow \varepsilon_{ik} \\ CCC \leftarrow CC(\varepsilon_{i1})_1 \end{cases} \end{cases}$ 
     $\sigma^{(k)} \leftarrow C_p \cdot \varepsilon^{(k)}$ 
  for k  $\in$  1..NE
     $\sigma_{4,k} \leftarrow \sigma_{3,k}$ 
     $\sigma_{3,k} \leftarrow \begin{cases} \mu \cdot (\sigma_{1,k} + \sigma_{2,k}) & \text{if } NDS = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
     $\varepsilon_{4,k} \leftarrow \varepsilon_{3,k}$ 
     $\varepsilon_{3,k} \leftarrow \begin{cases} \frac{-\mu}{E} \cdot (\sigma_{1,k} + \sigma_{2,k}) & \text{if } NDS = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 
  ( $\varepsilon$   $\sigma$   $C_p$ )T

```

Рис.55П.12. Расчет напряжений и деформаций в элементах

Здесь спрятана программа MCHB решения системы уравнений с ленточной матрицей коэффициентов (жесткости)



Упругий расчет до первой текучести

$i := 1..4$ $j := 1..2 \cdot NU$ $k := 1..NE$ $\sigma_{i,k} := 0$ $\varepsilon_{i,k} := 0$ $\varepsilon_{ik} := 10^{-6}$ $k1_k := 0$

$\Delta := \text{MCHB}(K, F, 2 \cdot NU, JH)$ Узловые перемещения при исходной нагрузке F

$Z2 := Z1(\Delta, \varepsilon_i, k1)$ $\varepsilon := Z2_1$ деформации

$\sigma := Z2_2$ напряжения

интенсивности напряжений и деформаций

$\varepsilon_i := \text{int}(\varepsilon)$ $\sigma_i := \text{int}(\sigma)$ $\max \sigma_i := \max(\sigma_i)$

напряжения, деформации, нагрузки, соответствующие

$\sigma_{\max} = \sigma_T$ в самом нагруженном элементе

$r := \frac{\sigma_T}{\max \sigma_i}$ $r = 5.19$ $\Delta := r \cdot \Delta$ $\varepsilon := \varepsilon \cdot r$ $\sigma := \sigma \cdot r$
 $F := F \cdot r$ $\varepsilon_i := \varepsilon_i \cdot r$ $\sigma_i := \sigma_i \cdot r$

$F_2 = -5190$ $\alpha := 1.8$ $F' := F \cdot \alpha$ $F'_2 = -9342.21$

F'_2 - сила в α раз, превышающая нагрузку F_2 , при которой

в самом нагруженном элементе напряжения равны пределу текучести.

критерий завершения
итерационного процесса

$Eps(\Delta, \Delta 1) := (\Delta^T \cdot \Delta) \cdot (\Delta 1^T \cdot \Delta 1)^{-1}$

Рис. 55П.13. Расчет параметров состояния системы в момент появления текучести

С учетом граничных условий уточняются матрица жесткости K и вектор сил P с помощью подпрограммы **GU** (см. рис. 55П.7). Полученные в ходе итерации результаты записываются в выходные массивы. Каждая итерация создает в каждом выходном массиве один столбец (перемещений, деформаций, напряжений и т. д.). В конце головной программы поставлен ограничитель длительности расчета. Оператор **break** — выход из программы, если выполняется условие (в нашем случае $n > 7$).

Данные передаются из программы через последний оператор, поэтому последним оператором является составной массив, в который включается все, что может представлять интерес по результатам расчета. Размеры массива и включенные в него данные можно менять по своему усмотрению.

Обратите внимание на запись комментариев в программе. Для их выделения надо использовать кавычки. В отмеченном месте ввода появляются две пары кавычек, между которыми и вводится текст.

| | |
|--|---|
| <pre> ZZ := "ввод переменных параметров" K ← K ε ← ε σ ← σ εi ← εi k1 ← k1 σi ← σi Eps1 ← 2 F ← F' n ← 0 Δ1 ← Δ while Eps1 - 1 > 0.001 "начало итерации" Δ ← MCHB(K, F, 2·NU, JH) Z2 ← Z1(Δ, εi, k1) ε ← Z21 σ ← Z22 εi ← intε(ε) σi ← intσ(σ) </pre> | <pre> for k ∈ 1..NE k1k ← 1 if σik ≥ σT k1k ← 0 otherwise K ← Kp(εi, k1) Eps1 ← Eps(Δ, Δ1) Δ1 ← Δ K ← GU(K, F, g, Δg)1 F ← GU(K, F, g, Δg)2 n ← n + 1 Epn ← Eps1 Δ11<n> ← Δ k11<n> ← k1 εi<n> ← εi σi<n> ← σi FF<n> ← F break if n = 7 "конец итерации" (σi<n> εi<n> σ ε Δ11 k11 Ep n)^T </pre> |
|--|---|

Рис. 55П.14. Головная программа расчета

| | |
|---|---|
| $ZZ = \begin{pmatrix} \{100,7\} \\ \{100,7\} \\ \{4,100\} \\ \{4,100\} \\ \{132,7\} \\ \{100,7\} \\ \{7,1\} \\ 7 \end{pmatrix}$ | σ_i - интенсивность напряжений в каждом элементе на каждой итерации ε_i - интенсивность деформаций в каждом элементе на каждой итерации σ - напряжения в каждом элементе на последней итерации ε - деформации в каждом элементе на последней итерации Δ - узловые перемещения на каждой итерации k_1 - признак пластичности элемента в каждом элементе на каждой итерации Eps - знак сходимости (погрешность расчета) на каждой итерации n - общее число итераций |
| $ZZ_1 := ZZ_1 \cdot 10^{-6}$ | $ZZ_3 := ZZ_3 \cdot 10^{-6}$ перевод напряжений в МПа |
| $ZZ_2 := ZZ_2 \cdot 10^6$ | $ZZ_4 := ZZ_4 \cdot 10^6$ перевод деформаций в ЕОД |

Рис. 55П.15. Содержание выходного массива головной программы

Головная программа длинная и узкая, занимает много места в документе. На рисунке 55П.14 правый столбец является продолжением левого.

Для экономии места рядом с головной и другими программами можно вводить следующие за программой выражения. Важно лишь, чтобы эти выражения были правее или ниже имени выражения-программы.

Много места в программе занимает присвоение значений переменным. Их можно убрать из программы и поместить в параметры имени программы. Но при этом программа становится очень широкой и занимает еще больше места в документе.

Определение средних напряжений и деформаций в узлах

```

σ1 := ZZ3      ε1 := ZZ4

k := 1..NE    j := 1..3    i := 1..NU    j1 := 1..4    σj1,i := 0    εj1,i := 0

gei := 0      geMIUk,j := geMIUk,j + 1

σj1,MIUk,j := σj1,MIUk,j + σ1j1,k      σj1,i :=  $\frac{\sigma_{j1,i}}{ge_i}$ 

εj1,MIUk,j := εj1,MIUk,j + ε1j1,k      εj1,i :=  $\frac{\epsilon_{j1,i}}{ge_i}$ 

напряжения в узлах
σzi := σ1,i    σyi := σ2,i    τzyi := σ4,i

```

Рис. 55П.16. определение напряжений и деформаций в узлах системы

```

n := ZZ8      k := 1,3..20

σнач.текк_k := (ZZ1)k,1    σконечк_k := (ZZ1)k,n
εнач.текк_k := (ZZ2)k,1    εконечк_k := (ZZ2)k,n

```

интенсивности напряжений и деформаций, средние по площади элемента k , на первой и последней итерациях

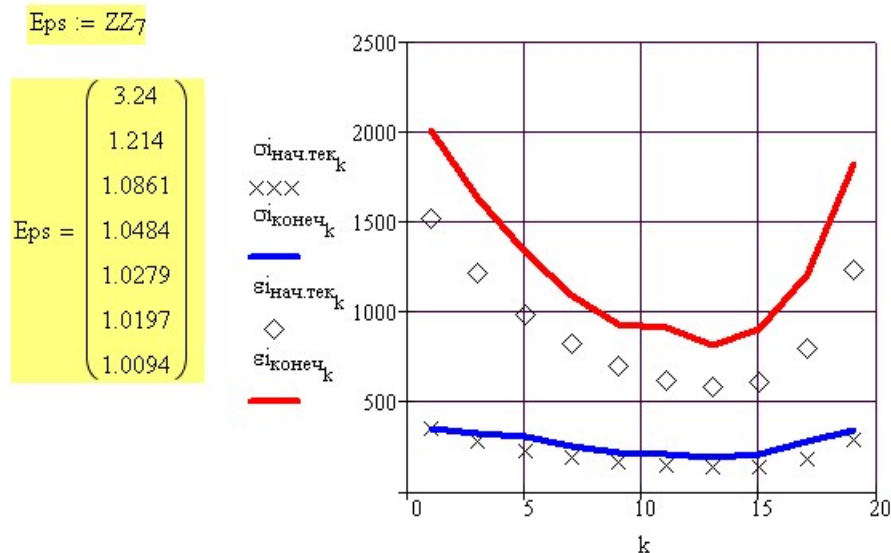


Рис. 55П.17. Напряжения и деформации в вертикальном сечении кольца после первой и последней итераций

Результатом работы головной программы является последний оператор программы — это выходной составной массив. В него включено все, что может быть пригодится для анализа результатов расчета (рис. 55П.15).

В результате работы головной программы **ZZ** определяются деформации и напряжения в каждом элементе. При использовании треугольных конечных элементов функция формы — уравнение плоскости и ее производные по координатам **y** и **z** — константы.

Поэтому деформации и напряжения для каждого элемента тоже являются постоянными по площади элемента. Это обстоятельство вынуждает разбивать тело на достаточно мелкие элементы, чтобы повысить точность расчетов. Такого недостатка нет у прямоугольных элементов, рассмотренных в примере 56.

Деформации и напряжения в узловых точках тела определяются как средние арифметические величины деформаций или напряжений во всех элементах, сходящихся в узле (рис. 55П.16).

Для выполнения этой операции организован счетчик **ge** элементов, сходящихся в узле, и сумматор деформаций и напряжений, суммирующий значения напряжений σ и деформаций ϵ , которым в матрице индексов принадлежит одно и тоже число.

Для удобства наблюдений величины напряжений и деформаций умножены на коэффициент перевода значений в **Мпа** и **ЕОД** (1 ЕОД = 10^{-6} — единица относительной деформации).

На рисунке 55П.17 показаны результаты итерационного процесса в программе ZZ: изменение критерия сходимости Eps в процессе семи итераций (слева от графика), значения интенсивностей деформаций и напряжений после первой и последней итерации в вертикальном сечении (где приложена сила P).

Отметим, что напряжения в сечении кольца меняют знак (рис. 55П.18). Однако интенсивности деформаций и напряжений ε_i и σ_i вычисляются как корень квадратный и поэтому всегда положительны. Опасные точки в сечении, где напряжения σ_i наибольшие, в крайних волокнах внутри кольца.

нагрузка, соответствующая началу текучести

$$F_2 = -5190.12 \text{ Н}$$

действующая нагрузка

$$F'_2 = -9342 \text{ Н}$$

с учетом пластических деформаций

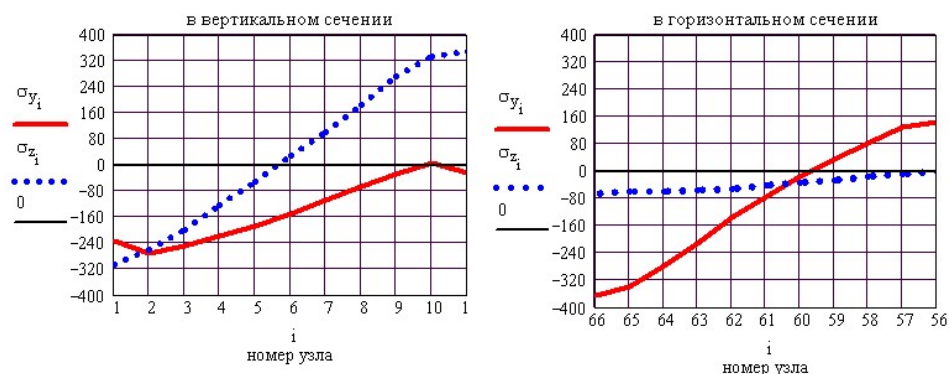


Рис. М6.18. Сравнение результатов расчета при упругой и упругопластической деформации

На рисунке 55П.18 сравнивается распределение напряжений в опасных сечениях при упругой и упругопластической деформации. Упругие напряжения в кольце подсчитаны в примере 53. Как видно из этого рисунка, характер распределения напряжений при переходе от упругой к упругопластической деформации не меняется. В точках, где упругие напряжения превышают предел текучести (вблизи крайних волокон), упругопластические напряжения срезаны до величины предела текучести.

Пример 56. Использование прямоугольного квадратичного элемента

(Программа 56-МКЭ-7-изопарам.mcd)

В примерах 53, 54, и 55 при решении задачи методом конечных элементов использовался треугольный элемент. Это простейший вид конечного элемента. Его функция формы — линейная, представляющая собой уравнение плоскости. Другими словами, искомая поверхность перемещений аппроксимируется набором плоских треугольников. Следовательно, для получения удовлетворительной аппроксимации необходимо разбивать плоское тело на большое количество сравнительно мелких треугольников.

При использовании четырехугольных элементов функция формы описывается полиномом, число элементов которого равно числу узлов элемента.

Для повышения точности расчетов в нашем примере использован квадратичный изопараметрический элемент с 8-ю узлами. Кроме 4-х угловых точек, взяты еще узлы посередине сторон прямоугольника. В таком случае количество элементов, на которые разбивается тело, может быть небольшим и зависит от конфигурации тела.

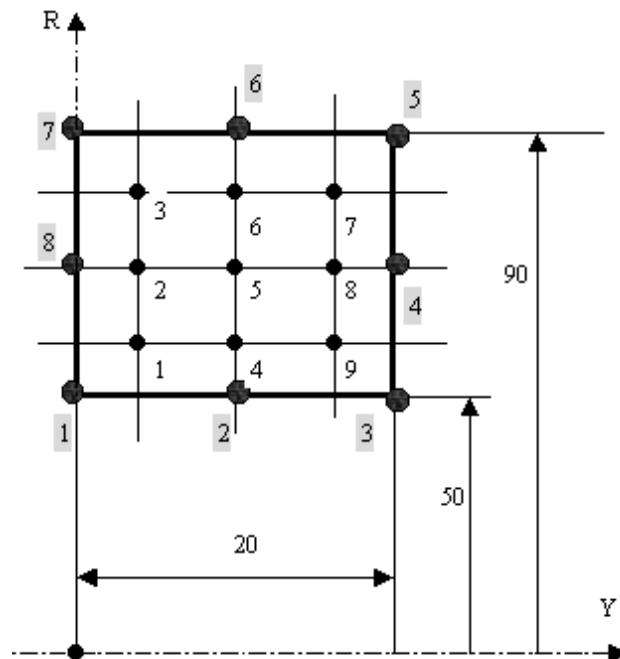


Рис. 56П.1. Схема расчета трубы под давлением

Трубу, нагруженную внутренним давлением, можно рассматривать как осесимметричную задачу, и для расчета использовать всего один конечный элемент, представленный на рис. 56П.1.

Труба находится в условиях плоской деформации, то есть осевая деформация $\epsilon_z = 0$.

Граничными условиями для такой задачи является равенство нулю осевых перемещений всех узловых точек.

Давление на внутреннюю поверхность трубы заменено эквивалентными узловыми силами.

| | | |
|-------------------|--|---|
| | $MTU := (3 \ 5 \ 8 \ 7 \ 6 \ 4 \ 1 \ 2)$ | |
| | $R := (90 \ 70 \ 50 \ 90 \ 50 \ 90 \ 70 \ 50)$ | $R := R^T$ |
| | $Z := (0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 20 \ 20 \ 20)$ | $Z := Z^T$ |
| | $g := (1 \ 3 \ 5 \ 11 \ 13 \ 15)$ | |
| граничные условия | $g := g^T$ | $Ng := \text{rows}(g) \quad i := 1..Ng \quad \Delta g_i := 0$ |
| число узлов | $NU := \max(MTU)$ | $NU = 8$ |
| число элементов | $NE := \text{rows}(MTU)$ | $NE = 1$ |
| ввод вектора сил | $F := 0 \quad k := 1..2 \cdot NU \quad F_k := 0$ | |
| | $F_6 := 10000 \quad F_{10} := 20000 \quad F_{16} := 10000$ | |

Рис. 56П.2. Исходные данные для расчета трубы под давлением

Исходные данные для расчета (координаты узлов, матрица индексов, граничные условия и вектор нагрузок) приведены на рис. 56П.2. Расчет выполнен в килограммах и миллиметрах. Заданные нагрузки соответствуют давлению внутри трубы порядка 700 атмосфер.

$$\begin{aligned}
 \xi &:= \begin{pmatrix} -0.7746 \\ 0 \\ 0.7746 \end{pmatrix} \\
 \eta &:= \xi \\
 w &:= \begin{pmatrix} 0.5556 \\ 0.88889 \\ 0.5556 \end{pmatrix} \\
 N(\xi, \eta) &:= \begin{bmatrix} -(1+\xi+\eta) \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot 0.25 \\ (1-\xi) \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot 0.5 \\ (-1+\xi-\eta) \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot 0.25 \\ (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\eta) \cdot 0.5 \\ (-1+\xi+\eta) \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot 0.25 \\ (1-\xi) \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot 0.5 \\ (-1-\xi+\eta) \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot 0.25 \\ (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\eta) \cdot 0.5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 56П.3. Функции формы

Функции формы прямоугольного элемента с 8-ю узлами приведены на рис. 56П.3. Они записаны в безразмерных координатах ξ вдоль оси Z и η вдоль оси R . Переход от координат ξ, η к координатам Z, R осуществляется с помощью якобиана

$$J = \begin{bmatrix} \partial Z / \partial \xi & \partial R / \partial \xi \\ \partial Z / \partial \eta & \partial R / \partial \eta \end{bmatrix}.$$

По углам четырехугольника координаты ξ и η принимают значения $+1$ и -1 . Для последующего численного интегрирования выбраны 9 точек внутри элемента, показанные на рис. 56П.1. Значения координат ξ и η этих точек приведены на рис. 56П.3. Там же проводятся весовые коэффициенты, используемые при численном интегрировании.

Квадратичный четырехугольный элемент содержит 8 узлов (по 3 на каждой стороне). Его интерполяционный полином является квадратичной функцией вдоль линий $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ и записывается в виде:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2$$

Эти функции для двумерных элементов равны нулю во всех узлах, за исключением узла, номер которого совпадает с номером соответствующей функции формы. Кроме того, они принимают нулевые значения вдоль всех границ элемента, которые не содержат указанного узла. Например, функция формы N_I для квадратичного элемента обращается в нуль во всех узлах, за исключением первого узла. Кроме того, она принимает нулевые значения вдоль сторон четырехугольника $\xi = 1$ и $\eta = 1$.

$$\begin{aligned}
 dN d\xi(\xi, \eta) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 1..8 \\ d1_i \leftarrow \frac{d}{d\xi} N(\xi, \eta)_i \\ d1 \end{cases} & dN d\eta(\xi, \eta) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 1..8 \\ d1_i \leftarrow \frac{d}{d\eta} N(\xi, \eta)_i \\ d1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 56П.4. Производные от функций формы по безразмерным координатам ξ и η

Вычисление производных от функций формы по безразмерным координатам ξ и η приведено на рис. 56П.4. Оно выполнено с помощью программирования, так как встроенный оператор дифференцирования Mathcad вычисляет производную только от одного выражения, но не от массива функций.

формирование матрицы
индексов перемещений
по матрице индексов узлов

$$k := 1..NE \quad i := 1..8$$

$$MP_{k,2i-1} := 2 \cdot MPU_{k,i} - 1$$

$$MP_{k,2i} := 2 \cdot MPU_{k,i}$$

$$i := 1..8 \quad a0_i := 0 \quad i := 1..16 \quad j := 1..16 \quad KK_{i,j} := 0$$

матрица внутренней жесткости при плоской деформации

$$C := \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)}$$

Рис.56П.5. Формирование матрицы индексов перемещений

После ввода функций формы и их производных начинается традиционный расчет методом конечных элементов. На рисунке 56П.5 показано формирование матрицы индексов перемещений по заданной в исходных данных (рис. 56П.2) матрице индексов узлов и матрица внутренней жесткости для осесимметричной задачи. Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ для стали заданы на рис. 56П.2.

Матрица жесткости элемента вычисляется по формуле

$$K^e = \int_V A^T \cdot C \cdot A \cdot dV,$$

где $A = D^T(N)$ — матрица производных от функций формы, D — матричный дифференциальный оператор, означающий присвоение в заданном порядке операции дифференцирования каждой из функций формы, выполняемое по правилам перемножения матриц.

Интегрирование выполняется численно по квадратурным формулам Гаусса путем суммирования выражений по 9 точкам с учетом весовых коэффициентов w , приведенных на рис. 56П.3. При этом вместо интеграла вычисляется приближенно равная ему сумма

$$K^e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2\pi R(\xi_i, \eta_j) \cdot A^T \cdot C \cdot A \cdot \det[J] \cdot w(\xi_i) \cdot w(\eta_j).$$

Вычисление матрицы жесткости элемента организовано в виде двух подпрограмм-функций и показано на рис. 56П.7.

Матрица A производных от функций формы имеет размерность 4×16 . Каждый ряд этой матрицы формируется отдельно в подпрограмме $A(k, \xi, \eta)$, а затем объединяются с помощью функции **stack** в выражении **AA**.

$$\begin{aligned}
& \text{BB}(\text{dNdx}, \text{dNdy}, \text{a0}, \text{ar}) := \text{augment}(\text{stack}(\text{dNdx}, \text{a0}), \text{stack}(\text{a0}, \text{dNdy}), \text{stack}(\text{a0}, \text{ar}), \text{stack}(\text{dNdy}, \text{dNdx})) \\
& \text{B}(k, \xi, \eta) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..8 \\ \quad \begin{array}{l} X_{i,1} \leftarrow Z_{\text{MIU}_{k,i}} \\ X_{i,2} \leftarrow R_{\text{MIU}_{k,i}} \end{array} \\ JJ^{(1)} \leftarrow \text{dNdx}(\xi, \eta) \\ JJ^{(2)} \leftarrow \text{dNdy}(\xi, \eta) \\ J \leftarrow JJ^T \cdot X \\ a \leftarrow (J^{-1} \cdot JJ^T)^T \\ \text{dNdx} \leftarrow a^{(1)} \\ \text{dNdy} \leftarrow a^{(2)} \\ \text{ar} \leftarrow \left(\frac{N(\xi, \eta)}{X^{(2)}} \right) \\ B \leftarrow \text{BB}(\text{dNdx}, \text{dNdy}, \text{a0}, \text{ar})^T \\ \text{for } j \in 1..16 \\ \quad \begin{array}{l} jj \leftarrow \begin{cases} 2j-1 & \text{if } j \leq 8 \\ 2(j-8) & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{for } i \in 1..4 \\ \quad B1_{i,jj} \leftarrow B_{i,j} \end{array} \\ (B1 \ J \ B \ \text{dNdx} \ \text{dNdy})^T \end{array} \\
& \text{KE} := \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..NE \\ \quad \begin{array}{l} K \leftarrow KK \\ A \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..3 \\ \quad \begin{array}{l} \xi \leftarrow \xi_i \\ \text{for } j \in 1..3 \\ \quad \begin{array}{l} \eta \leftarrow \eta_j \\ R_j \leftarrow R_{\text{MIU}_{k,8}} + \eta \cdot (R_{\text{MIU}_{k,8}} - R_{\text{MIU}_{k,1}}) \\ BB \leftarrow B(k, \xi, \eta) \\ B \leftarrow BB_1 \\ J \leftarrow BB_2 \\ K \leftarrow K + 2 \cdot \pi \cdot R_j \cdot B^T \cdot C \cdot B \cdot |J| \cdot w_i \cdot w_j \\ A \leftarrow A + |J| \cdot w_i \cdot w_j \end{array} \end{array} \\ KE_k \leftarrow K \\ FE_k \leftarrow A \\ (KE \ FE)^T \end{array} \end{array}
\end{aligned}$$

Не работает в Mathcad 13

$KE_2 = (800.072)$ равно площади элемента

Рис. 56П.6. Формирование матрицы жесткости элемента

В подпрограмме **A** вначале координаты узлов **Z** и **R** объединяются для удобства вычислений в один массив. Затем вычисляется якобиан **J** и с его помощью производные от функций формы по координатам **Z** и **R**. Далее вызывается функция **AA** и формируется массив **A**.

В конце подпрограммы происходит перенумерация элементов массива **A**, чтобы удовлетворить условию: горизонтальные перемещения — нечетные, вертикальные — четные.

Составной массив вывода результатов содержит нужные для дальнейших расчетов матрицу производных от функций формы **A** и якобиан **J**. Остальные элементы приведены для возможного анализа результатов и могут быть удалены из программы.

В подпрограмме **KE** формируется матрица жесткости элемента по приведенной выше формуле с двойной суммой, суммирующей вклад в результат всех 9 точек интегрирования. В этой формуле используются радиусы **R** всех точек интегрирования, которые рассчитываются чуть выше матрицы жесткости.

В конце подпрограммы определяется площадь элемента. Это выражение является проверкой правильности вычисления якобиана и производных от функций формы.

матрица жесткости системы $i := 1..2 \cdot NU \quad j := 1..2 \cdot NU \quad K_{i,j} := 0$

$i := 1..16 \quad j := 1..16 \quad k := 1..NE \quad KE := KE_1$

$$K_{\text{MI}_{k,i}, \text{MI}_{k,j}} := K_{\text{MI}_{k,i}, \text{MI}_{k,j}} + (KE_k)_{i,j}$$

учет граничных условий в перемещениях $j := 1..2 \cdot NU \quad i := 1..rows(g)$

$$F_j := \text{for } i \in 1..rows(g) \quad F_g := K_{g, g_i} \cdot \Delta g_i$$

$$F_j \leftarrow F_j - K_{j, g_i} \cdot \Delta g_i$$

$$K_{g, j} := \begin{cases} K_{g, j} & \text{if } g = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_{j, g} := \begin{cases} K_{j, g_i} & \text{if } g_i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 56П.7. Формирование матрицы жесткости системы

определение узловых перемещений $\Delta := K^{-1} \cdot F$

локальные перемещения элементов по столбцам $i := 1..16 \quad \Delta E_{i,k} := \Delta \text{MI}_{k,i}$

Определение координат точек вывода напряжений

n := 3 **m** := 5 поменяйте значения n и m

$$k := 1..NE \quad i := 1..n \quad j := 1..m \quad \xi_{1i} := 1 - \frac{n-1}{2} \cdot i \cdot 2$$

$$\eta_{1j} := 1 - \frac{m-1}{2} \cdot j \cdot 2$$

Рис. 56П.8. Определение узловых перемещений

Матрица жесткости системы определяется так же, как и в примерах 26–30 — путем суммирования коэффициентов жесткости элементов с помощью матрицы индексов (рис. 56П.7).

На рисунке 56П.8 показано определение узловых перемещений системы и элементов. На этом же рисунке определяются безразмерные координаты точек, в которых надо определить напряжения и деформации. Количество этих точек можно выбрать произвольно. В данном примере n — число точек вдоль оси Z , m — число точек вдоль оси R . Работая с примером, поменяйте значения n и m .

Напряжения и деформации элементов в их локальной нумерации определяются в подпрограмме $\sigma\varepsilon$ (рис. 56П.9) по тем же формулам, что и в предыдущих примерах, для безразмерных координат, введенных на рис. 56П.8. Для экономии места на рисунке и в документе из подпрограммы $\sigma\varepsilon$ в отдельную подпрограмму σ выделена перенумерация напряжений по столбцам для удобства построения графиков.

```

σ ε := for k ∈ 1..NE
        for i ∈ 1..n
            ξ ← ξ1i
            for j ∈ 1..m
                η ← η1j
                εEi,j ← B(k, ξ, η)1 · ΔE<k>
                σEi,j ← C · εEi,j
            εE1k ← εE
            σE1k ← σE
        (σE1
         εE1)

σ := for i ∈ 1..n
      for k ∈ 1..NE
          for j ∈ 1..m
              i1 ← (k-1) · m + j
              σz1,i ← [(σ ε1)k]i,j1
              σr1,i ← [(σ ε1)k]i,j2
              σt1,i ← [(σ ε1)k]i,j3
              τi1,i ← [(σ ε1)k]i,j4
          (σz σr σt τ)T
  
```

Рис. 56П.9. Определение напряжений и деформаций в выбранных точках

$$RC_k := R_{MIU_{k,8}} \quad b_k := R_{MIU_{k,8}} - R_{MIU_{k,1}}$$

$$RJ_{k,j} := RC_k + \eta_{1j} \cdot b_k \quad RJ := RJ^T$$

Для NE=3 замените RJ на RJ1 Включите эти два выражения

$$RJ1 := \left(\text{stack}(RJ^{(1)}, RJ^{(2)}, RJ^{(3)}) \right)^T \quad RJ := RJ1$$

$$j := 1..m \cdot NE \quad \sigma_z := (\sigma_1)^{(1)} \quad \sigma_r := (\sigma_2)^{(1)} \quad \sigma_t := (\sigma_3)^{(1)}$$

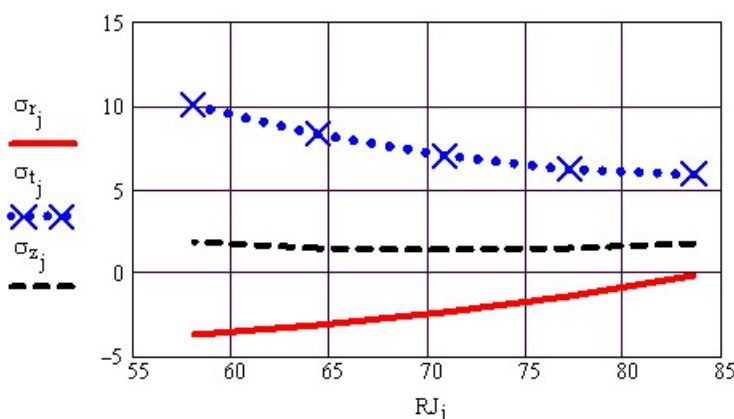


Рис. 56П.10. Результаты расчета напряжений в трубе под давлением

Результаты расчета напряжений в трубе под давлением приведены на рис. 56П.10. Для построения графика безразмерные координаты точек η , где определены напряжения, переведены в размерные R (в миллиметрах).

Расчеты показывают, что даже использование одного элемента позволяет получить хорошие результаты.

На рисунке 56П.11 находятся исходные данные для решения этой же задачи с 3-мя элементами. Замените в расчетах исходные данные для одного элемента, приведенные на рис. 56П.2 данными для 3-х элементов.

Три элемента

координаты узлов

$$R := (110 \ 100 \ 90 \ 80 \ 70 \ 60 \ 50 \ 110 \ 90 \ 70 \ 50 \ 110 \ 100 \ 90 \ 80 \ 70 \ 60 \ 50)$$

$$Z := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20 \ 20)$$

матрица индексов

$$R := R^T$$

$$Z := Z^T$$

$$MIU := \begin{pmatrix} 3 & 9 & 14 & 13 & 12 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & 10 & 16 & 15 & 14 & 9 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 18 & 17 & 16 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

граничные условия (равенство нулю осевых перемещений в поперечных сечениях трубы)

$$g := (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ 13 \ 23 \ 25 \ 27 \ 29 \ 31 \ 33 \ 35)$$

$$g := g^T \quad Ng := \text{rows}(g) \quad i := 1..Ng \quad \Delta g_i := 0$$

число узлов $NU := \max(MIU) \quad NU = 18$

число элементов $NE := \text{rows}(MIU) \quad NE = 3$

ввод вектора сил $k := 1..2 \cdot NU \quad F_k := 0$

$$F_{14} := 10000 \quad F_{22} := 20000 \quad F_{36} := 10000$$

Рис. 56П.11. Исходные данные для решения задачи с 3-мя элементами

В расчетной схеме 3 элемента расположены друг над другом, а в матрице σ напряжения в них находятся в разных столбцах, поэтому перед построением графика массив σ для 3-х элементов трансформируется в вектор с помощью функции [stack](#).