

Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»
Кафедра механики деформированного твердого тела

Макаров Е.Г.

Курсовая работа по методу конечных элементов

Методические указания

Санкт-Петербург БГТУ-Военмех

2020 г

Предисловие

2

Курсовая работа выполняется параллельно с чтением курса лекций по механике деформируемого твёрдого тела и основам метода конечных элементов (МКЭ).

Статический расчёт пространственной стержневой системы выбран как простейший вариант МКЭ.

Алгоритм решения задачи в Mathcad полностью аналогичен алгоритму решения задачи в ANSYS. Чтобы показать возможности МКЭ стержни в системе имеют различные поперечные сечения и изготовлены из различных материалов. Один из стержней имеет поперечное сечение произвольной формы. Расчёт геометрических характеристик такого сечения производится путем решения уравнения Пуассона. Это типичный пример общего подхода к решению задач МКЭ.

Расчёт пространственной стержневой системы в ANSYS упрощён по сравнению с решением в Mathcad (ближе к реальному расчёту). Все стержни изготовлены из одного материала и имеют одинаковую форму сечения.

Динамический расчёт — это вторая задача МКЭ, решаемая в Mathcad и в ANSYS.

Содержание работы

Курсовая работа состоит из двух частей:

1. Статический и динамический расчет пространственной стержневой системы с использованием Mathcad.
Стержневая система, состоящая из нескольких стержней различной формы поперечного сечения, нагружена несколькими нагрузками.
Для сечения сложной формы момент инерции при кручении определяется методом конечных элементов путем решения уравнения Пуассона
При статическом приложении нагрузок требуется определить внутренние усилия, напряжения и перемещения в стержнях системы, подобрать размеры поперечных сечений элементов системы, удовлетворяющие условиям прочности, жесткости и минимальному весу конструкции.
При динамическом нагружении определить собственные частоты колебаний системы и влияние на них сосредоточенных масс, найти отклик системы на воздействие вынуждающей силы. Для одного из узлов найти коэффициент динамичности в момент резонанса.
2. Статический и динамический расчет пространственной стержневой системы с использованием вычислительного комплекса ANSYS.

Часть 1. Расчет пространственной стержневой системы в Mathcad

1. Порядок расчёта стержневой системы методом конечных элементов

Работа расчетчика

1. Разбить стержневую систему на элементы-стержни.
2. Пронумеровать элементы и узлы стержневой системы.
3. Выбрать глобальные оси координат, единые для всей системы.
4. Ввести координаты всех узлов системы.
5. Ввести **матрицу индексов элементов** стержневой системы $[MIE]$, показывающую точки соединения элементов стержневой системы.
6. Ввести **граничные условия в перемещениях** $[Gu]$, указав номер узла, направление перемещения и его величину. Так вводятся закрепления стержневой системы.
7. Задать **нагрузки**, указав для каждой из них, номер узла и направление действия нагрузки.
8. Если среди внешних сил есть распределенная нагрузка, заменить ее эквивалентными нагрузками, приложенными в узлах.
9. Для каждого элемента из конструктивных соображений выбрать материал, форму, и размеры поперечного сечения стержня.

10. По номерам узлов программа составляет **матрицу индексов узловых перемещений** $[MIA]$, вводя шесть перемещений в каждом узле.

Путем объединения матрицы индексов элементов $[MIE]$ и матрицы индексов узловых перемещений $[MIA]$ формируется **матрица индексов перемещений элементов** $[MI]$. Тот факт, что ряд узлов закреплён, учитывается далее в процессе ввода граничных условий в перемещениях.

Перенумеровываются компоненты вектора сил $\{F\}$ с учетом созданной матрицы индексов перемещений $[MIA]$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Каждое перемещение и каждая узловая сила получают свой индивидуальный номер

11. По координатам узлов и матрице индексов элементов $[MIE]$, играющей роль чертежа, программа определяет длины элементов, затем определяет **направление локальных осей координат**. Ось x направлена вдоль оси элемента от первого узла (в матрице $[MIE]$) ко второму. Ось y лежит в плоскости, в которой находятся ось стержня x локальная и ось Y глобальная. Направление осей z и y определяется с помощью векторного произведения $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ и $\vec{y} = \vec{x} \times \vec{z}$. Далее через проекции ортов осей (единичных векторов) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ определяется **матрица направляющих косинусов** $[L]$.
12. Для выбранных материалов вводятся модуль Юнга E , плотность ρ , допускаемое напряжение $[\sigma]$.
13. По выбранным форме и размерам поперечных сечений элементов рассчитываются их геометрические характеристики (площадь, моменты инерции и моменты сопротивления).
14. Формируется **матрица жесткости системы** $[\bar{K}]$.

Для стандартного стержневого элемента по стандартным формулам, с учётом материала и поперечного сечения стержней, вводится готовая матрица жесткости элемента $[K^e]$.

Далее определяются **матрицы жесткости элементов в глобальных осях координат** $[\bar{K}^e] = [L]^T [K^e] [L]$.

Путем суммирования с помощью матрицы индексов перемещений $[MI]$ вычисляются **матрицы жесткости системы в глобальных осях координат** $[\bar{K}]$.

15. Матрица жёсткости системы $[\bar{K}]$ корректируется с учётом граничных условий в перемещениях (закреплений системы).
16. Определяются **узловые перемещения системы в глобальных осях координат** путем решения основного уравнения $\{\bar{F}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\}$.
17. Определяются **узловые перемещения элементов** $\{\bar{\Delta}^e\}$ в глобальных осях координат с помощью матрицы индексов перемещений элементов $[MI]$.
18. Определяются **узловые перемещения элементов в локальных осях координат** $\{\Delta^e\} = [L]\{\bar{\Delta}^e\}$.
19. Определяются **узловые усилия** в каждом элементе в локальных осях координат $\{F^e\} = [K^e]\{\Delta^e\}$.
20. Каждый элемент рассматривается как балка, нагруженная 12-ю узловыми нагрузками. По формулам сопротивления материалов определяются **эквивалентные напряжения** в начале и в конце каждого элемента.
21. Зная узловые перемещения $\{\Delta\}$, с помощью функций формы $[N]$, по уравнению связи $\{u\} = [N] \cdot \{\Delta\}$ определяются **перемещения в локальных координатах** по длине элементов и их максимальные значения для каждого элемента. Строится график вида стержневой системы до и после деформации.

- 4 22. Вручную вводится сосредоточенная масса в выбранном узле.
Далее вновь компьютерный расчет.
23. Стандартная матрица масс системы $[M]$ корректируется с учетом сосредоточенной массы.
24. С помощью функций **genvals** и **genvecs** решается уравнение свободных незатухающих колебаний $[M]\{\Delta''\} + [K]\{\Delta\} = 0$ и рассчитывается вектор собственных частот и спектр собственных векторов системы.
25. Используя прямое интегрирование матричного уравнения вынужденных затухающих колебаний $[M]\{\Delta''\} + [H]\{\Delta'\} + [K]\{\Delta\} = \{F(t)\}$ (методом Ньюмарка), рассчитывается динамическое перемещение во времени одного из узлов системы в момент резонанса на первой собственной частоте и находится коэффициент динамичности.

Вновь работа расчетчика

26. Уточнить форму и размеры сечений с учетом выполнения условий прочности и жесткости и для достижения минимального веса конструкции.
27. Произвести повторный расчет стержневой системы несколько раз до достижения нужных результатов.
28. Для элемента, нагруженного распределенной нагрузкой, из внутренних усилий вычесть эквивалентные нагрузки, вернуть на элемент распределенную нагрузку, построить эпюры внутренних усилий, определить максимальное эквивалентное напряжение.

Порядок расчета моментов инерции сложного сечения

Для нахождения момента инерции при кручении сложного сечения в программе решается уравнение Пуассона методом конечных элементов.

Работа расчетчика

1. Ввести матрицу координат выбранных точек контура сложного сечения.
2. Для создания сетки конечных элементов планшетным способом указать число рядов и число столбцов планшета.

Работа компьютерной программы

3. С использованием функций интерполяции определяются уравнения контура сечения.
4. По формулам сопротивления материалов определяются осевые моменты инерции сложного сечения.
5. По заданному числу рядов и столбцов формируется планшет для разбивки сечения на конечные элементы.
6. Определяются координаты узлов планшета и сложного сечения.
7. Формируется матрица индексов элементов сложного сечения $[MIE]$, путем исключения узлов планшета, находящихся за пределами сложного сечения, с присвоением каждому узлу своего порядкового номера.

Формируется матрица индексов всего сложного сечения $[MI]$.

8. Записываются граничные условия — список узлов, лежащих на контуре сложного сечения.
9. Определяется матрица жесткости линейных треугольных элементов $[KE]$.
10. Рассчитывается матрица жесткости системы путем суммирования коэффициентов жесткости элементов по матрице индексов узлов $[MI]$.
11. Формируется вектор правых частей уравнений $\{F\}$, для чего задаётся любое значение относительного угла закручивания θ . Например, $\theta = 1$ град/м.
12. Матрица жесткости $[K]$ корректируется с учётом граничных условий (списка узлов на контуре сечения).
13. Решается основное уравнение $[K]\{\Phi\} = \{F\}$ и находится вектор узловых значений функции напряжений $\{\Phi\}$.
14. Рассчитываются касательные напряжения в узлах и крутящий момент в сечении при заданном угле

закручивания θ .

- 5 15. Определяется момент инерции и момент сопротивления при кручении.
16. Найденные геометрические характеристики передаются в программу расчета стержневой системы.
17. В программе расчета стержневой системы определяются эквивалентные напряжения для каждого узла сложного поперечного сечения и определяется максимальное эквивалентное напряжение для этого стержня.
18. Используя масштабный коэффициент, можно увеличить или уменьшить размеры сложного сечения с целью выполнения условий прочности и жесткости стержневой системы.

2. Пример выполнения курсовой работы

В начале работы изучите тестовый пример. Откройте в Mathcad 15 или 14 **сразу все три программы** МКЭ-доп-расчёты, МКЭ-простран и МКЭ-Пуассон. Три раза запустите на счёт все три программы. Это необходимо для обмена данными между программами. Каждая программа записывает в отдельные файлы результаты расчёта, откуда их считывают другие программы.

ОБЯЗАТЕЛЬНО

Все три программы должны находиться в одном каталоге, в который они записывают свои вспомогательные файлы (25 файлов).

ПРИМЕЧАНИЕ

Для перехода от одной программы к другой используйте сочетание клавиш CTRL+F6. Для пересчёта программы используйте CTRL+F9.

2.1. Ввод исходных данных к расчету

В процессе подготовки к расчету стержневой системы подготовить все исходные данные на листе бумаги. Далее набрать все данные в Mathcad и выполнить расчет. Рассмотрим вначале **подготовку исходных данных на бумаге**.

Подготовка данных к расчету

1. Заданную стержневую систему, изображенную на рис. 1, нарисовать в масштабе, выписать исходные данные для расчета.
2. Выбрать глобальные оси координат, единые для всей системы. Глобальные оси XYZ — берутся в правосторонней системе координат, как на рис.1.

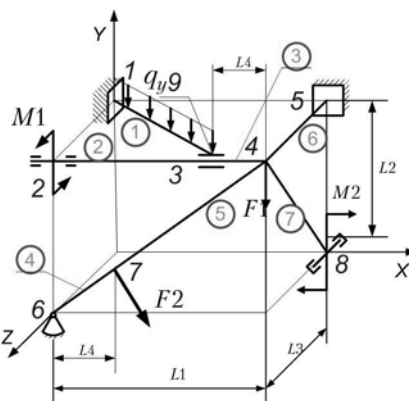


Рис. 1. Расчетная схема пространственной стержневой системы

3. Разбить систему на элементы-стержни. При этом учесть, что нагрузки прикладываются только в узлах, то есть на границах элементов.
4. Пронумеровать узлы и элементы. На рис. 1 номера узлов обозначены синими цифрами, номера элементов красными цифрами в кружке. Всего в системе 7 элементов и 9 узлов.

ПРИМЕЧАНИЕ

Концы стержней, сходящиеся в шарнире, это разные узлы. Ось ползуна и втулка это разные узлы, так как у них разные перемещения. Дополнительный узел должен быть **последним** в списке узлов.

Рассматриваемая в примере система (рис. 1) разбита на 7 элементов-стержней. Левый конец элемента 2 установлен в плавающем подшипнике и может поворачиваться вокруг оси X и скользить вдоль нее.

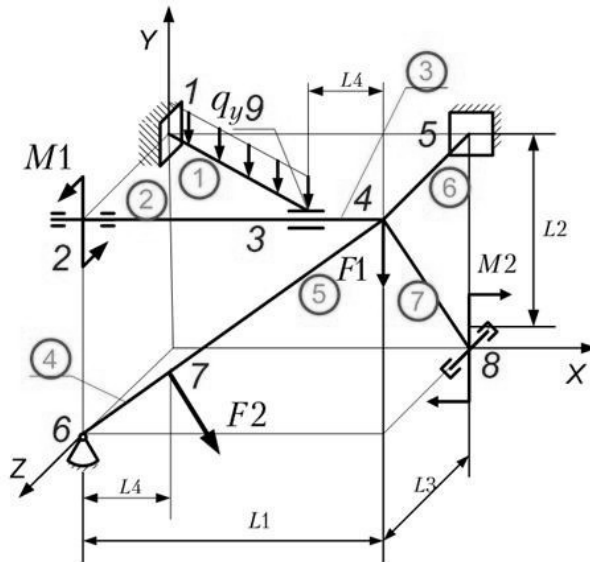
Элемент 7 прикреплен к оси, допускающей только вращение (без скольжения) вокруг оси Z. Элемент 4 прикреплен внизу к сферической шарнирной опоре, допускающей вращение вокруг трех осей (элемент 4 вставлен в лунку).

ПРИМЕЧАНИЕ

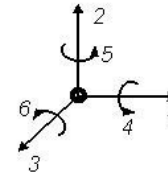
Всё, что надо подготовить на листе бумаги для ввода в расчет, показано на рис. 2. Такой лист должен быть включен в отчет по курсовой работе. Не усложняйте себе работу. Все эти сведения запишите от руки на простом листе бумаги.

Исходные данные к расчету Размеры стержневой системы $L_1 = 80 \text{ см}$ $L_2 = 60 \text{ см}$ $L_3 = 40 \text{ см}$ $L_4 = 20 \text{ см}$
Внешние нагрузки $F_1 = 200 \text{ Н}$ $F_2 = 300 \text{ Н}$ $q = 300 \text{ Н/м}$ $M_1 = 20 \text{ Нм}$ $M_2 = 25 \text{ Нм}$

Расчетная схема



Локальная нумерация перемещений в узле



Координаты узлов стержневой системы

номер узла	X	Y	Z
1	0	L2	0
2	0	L2	L3
3	$L_1 - L_4$	L2	L3
4	L1	L2	L3
5	L1	L2	0
6	0	0	L3
7	L4	$L_4 \cdot \tan(\alpha)$	L3
8	L1	0	0
9	$L_1 - L_4$	L2	L3

Расчет углов, используемых в расчетных данных

$$\alpha := \arctan\left(\frac{L_2}{L_1}\right)$$

$$\beta := \arctan\left(\frac{L_3}{L_1 - L_4}\right)$$

Эквивалентные узловые нагрузки

$$R_y := \frac{q \cdot L \cdot L_1}{2} \quad M_y := \frac{q \cdot (L \cdot L_1)^2}{12}$$

Внешние нагрузки в узлах

$$FF := \begin{pmatrix} -R_y & 1 & 2 \\ -R_y & 9 & 2 \\ M_y \cdot \sin(\beta) & 1 & 4 \\ -M_y \cdot \cos(\beta) & 1 & 6 \\ M_1 & 2 & 4 \\ -M_y \cdot \sin(\beta) & 9 & 4 \\ M_y \cdot \cos(\beta) & 9 & 6 \\ -F_1 & 4 & 2 \\ F_2 \cdot \sin(\alpha) & 7 & 1 \\ -F_2 \cdot \cos(\alpha) & 7 & 2 \\ -M_2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Условия закрепления стержневой системы

$$Gu := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ввод в расчет материала, формы и размеров сечений

Материал элементов-стержней

номер узла	1	2
1	"латунь"	"сложное"
2	"сталь"	"круглое"
3	"сталь"	"круглое"
4	"алюминий"	"прямоугольное"
5	"алюминий"	"прямоугольное"
6	"сталь"	"уголок"
7	"алюминий"	"круглое"

Матрица индексов элементов

$$MIE := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 10 & 20 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 16 \end{pmatrix} \cdot \text{мм}$$

7-й элемент – уголок 30 x 30 x 3

$$J_y = J_z = 1,45 \text{ см}^4 \quad J_x = 0,051 \text{ см}^4 \quad W_y = W_z = 0,67 \text{ см}^3 \quad W_x = 0,17 \text{ см}^3$$

Рис. 2. Данные для расчета, подготовленные на листе бумаги

5. Далее надо выписать исходные данные для расчета (размеры стержневой системы и внешние нагрузки).

При вводе координат узлов в матрицу X , а затем при вводе вектора сил лучше указывать **буквенные** обозначения величин, а не цифровые. Тогда при изменении исходных данных пересчет всех программ происходит автоматически.

6. Записать таблицу (матрицу) координат узлов стержневой системы в выбранной глобальной системе координат. В матрице координат узлов X первый столбец содержит номера узлов и в расчётах он не используется, во втором столбце собственно координаты X , в третьем и четвертом соответственно координаты Y и Z . При расчете координат узлов наклонных стержней в ряде случаев надо знать углы наклона стержней (в данном примере α). Вспомогательные формулы для расчета координат удобно записать здесь же перед вводом координат.
7. Составить матрицу индексов элементов MIE , которая для компьютера играет роль чертежа, поясняя, как соединяются друг с другом различные элементы. В ней первый столбец — номер элемента (в расчётах не используется), второй столбец — номер узла начала элемента $x = 0$, третий столбец — номер узла конца элемента $x = L$.
8. Записать таблицу внешних нагрузок. Указать в ней в каком узле, и по какому направлению действует каждая сила. Нагрузки вводятся по направлениям глобальных перемещений в узле и, если нужно, раскладываются на проекции. Таблица нагрузок (матрица FF) содержит три столбца. Первый — величина нагрузки, второй — в каком узле приложена нагрузка, третий — по какому глобальному направлению действует сила. Локальная нумерация положительных нагрузок и перемещений показана на рис. 2, вверху справа. Распределенную нагрузку надо заменить эквивалентными силами, приложенными в узлах системы. То есть для элемента с распределенной нагрузкой надо определить эквивалентные силу R_z и момент M_z .
9. Указать граничные условия в перемещениях, то есть указать закрепления стержневой системы. Для этого составляется матрица G_u , число строк в которой равно числу узлов стержневой системы. Для каждого узла по каждому направлению указывается величина перемещения. До решения задачи перемещения известны лишь в местах закрепления. В нашем примере все они равны нулю, но, в принципе, можно ввести любую разумную величину перемещения. Для перемещений, не имеющих ограничений, которые еще предстоит определить, записывается любое большое значение, например, один метр, которое заменяет прочерк в таблице и не учитывается программой при расчете. Например, для заделки ставим 6 нулей, для незакрепленного узла 6 единиц.
10. Выбрать форму и размеры поперечного сечения для каждого элемента-стержня (матрицы K и BD , на рис.2, внизу). В матрице K первый столбец — номер элемента (в расчётах игнорируется), второй столбец — код выбранного материала, третий столбец — код сечения.

Для каждого элемента-стержня выбрать материал из пяти, введенных в качестве справочного материала в программу расчета. $K=1$ — сталь, $K=2$ — дюралюминий Д60, $K=3$ — латунь мягкая Л68, $K=4$ — дерево сосна, $K=5$ — текстолит.

Сечения элементов рекомендуется взять прямоугольные (сплошные или полые) $K=1$, круглые (кольцевые) $K=2$, и прокатного профиля (равнобокий уголок) $K=4$. Один из стержней, содержащий один или два элемента, должен быть сложного поперечного сечения $K=3$. В начале работы можно вместо него взять прямоугольное или круглое сечение. В дальнейшем, после проведения расчётов в программе Пуассон поставить код $K=3$. Тогда данные для прямоугольного или круглого сечения будут игнорироваться и в расчёт войдут моменты инерции сложного сечения. Ввод в расчет такого сечения рассматривается в разделе 2.4.

Верхние элементы рамы желательно сделать прямоугольного сечения (сплошного или коробчатого). Они предназначены для размещения на них какого-либо оборудования. Для таких сечений в матрице BD вводятся ширина сечения b , высота h и толщина стенки δ .

Для перемещения ползуна используются стержни круглого сечения. Для опорных элементов предпочтительно использовать трубчатое сечение, во-первых, с целью уменьшения веса рамы, а во-вторых, для увеличения запаса устойчивости сжатых стержней (проверка на устойчивость в программе расчета не производится). Для расчета надо ввести наружный диаметр трубы D и внутренний диаметр d . Для малонагруженных стержней можно использовать сплошной круглый стержень ($d = 0$). Матрица BD , как и любая матрица в Mathcad должна быть полностью заполнена, поэтому пустые ячейки заполняем нулями. Кстати, в ANSYS любое незаданное значение, по умолчанию, принимается равным нулю.

Один из элементов должен иметь сечение равнобокого уголка $K=4$. Его размеры и моменты инерции определяются по сортаменту прокатной стали (таблица прилагается в конце этого документа). В тестовом примере взят уголок №3 (30 x 30 x3). Для него из сортамента взяты $A = 1,74 \text{ см}^2$, $J_y = J_z = 1,45 \text{ см}^4$, $W_y = W_z = 0,67 \text{ см}^3$. Момент инерции при кручении определим по приближенной

формуле $J_k = J_x = \sum \frac{b\delta^3}{3} = \frac{1}{3}(3 \cdot 0,3^3 + 2 \cdot 7 \cdot 0,3^3) = 0,051 \text{ см}^4$, здесь δ — толщина полки уголка.

Момент сопротивления при кручении $W_k = W_x = \frac{J_k}{b_{\max}} = \frac{0,051}{0,3} = 0,17 \text{ см}^3$.

Расчетчик сам определяет, какую форму сечения выбрать для того или иного элемента. В конструкции должны быть элементы с сечением всех четырех типов.

Для начала расчета возьмите произвольные размеры сечений (по здравому смыслу). В процессе расчета будут найдены размеры, удовлетворяющие условиям прочности и жесткости.

На этом подготовка данных к расчету закончена. Теперь их надо ввести в программу "МКЭ-доп-расчеты".

Ввод расчетных данных в программу МКЭ-доп-расчеты

Для ввода данных и проведения вспомогательных расчетов используется программа «МКЭ-доп-расчеты». Поскольку сами расчеты у всех одинаковы, во всех программах они спрятаны в закрытых зонах. Видимым остается только то, что должно быть показано в распечатанной программе, а именно, исходные данные, алгоритм программы и результаты расчета.

ПРИМЕЧАНИЕ

Двойной щелчок мышью на границе закрытой зоны раскрывает ее или закрывает, если зона уже раскрыта.

В начале программы уже введены **квазиразмерности**, то есть размерностям, которые будут использоваться в расчетах, присвоено числовое значение. Это позволяет вводить и выводить любые данные в удобной размерности, но сами расчеты в Mathcad производятся в системе СИ.

Последовательно введите в программу данные, подготовленные на рис. 2.

ПРИМЕЧАНИЕ

Голубым цветом в программе МКЭ-доп-расчеты и в других программах показаны операторы, которые должен вести расчетчик. Замените данные тестового примера своими значениями.

Введите исходные данные к расчету (рис. 3), затем **координаты узлов, матрицу индексов элементов**.

Вспомогательные расчеты к расчёту пространственной стержневой системы методом конечных элементов

CWD = "e:\курс-2017\"

Исходные данные квазиразмерности мм $\equiv 0.001$ см $\equiv 0.01$ МПа $\equiv 10^6$ ORIGIN := 1
 Размеры стержневой системы L1 := 80·см L2 := 60·см L3 := 40·см L4 := 20·см
 Внешние нагрузки в ньютонах и в метрах F1 := 200 F2 := 100 q := 300 M1 := 20 M2 := 25

Методические указания ссылка

Выражения в программах выделенные вот таким голубым цветом, вводятся пользователем

Ввод исходных данных

$$\alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{L2}{L1}\right)$$

Ввод координат узлов

номер узла	координаты узла		
X	Y	Z	
1	0	L2	0
2	0	L2	L3
3	L1 - L4	L2	L3
4	L1	L2	L3
5	L1	L2	0
6	0	0	L3
7	L4	L4·tan(α)	L3
8	L1	0	0
9	L1 - L4	L2	L3

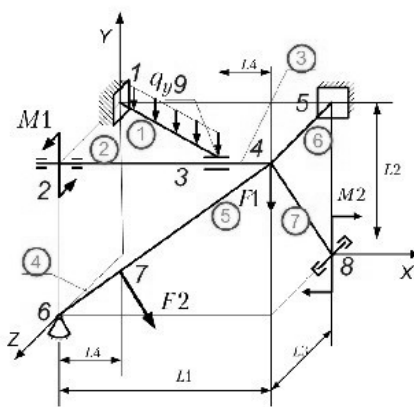
Матрица индексов элементов

номер узлы начала и
элемента конца элемента

1	1	9
2	2	3
3	3	4
4	6	7
5	7	4
6	5	4
7	8	4

X := submatrix(X, 1, rows(X), 2, 4) MIE := submatrix(MIE, 1, rows(MIE), 2, 3)

Расчётная схема конструкции



номера узлов и элементов удаляются из матриц

Рис. 3. Ввод координат узлов и матрицы индексов элементов

Расчетчик вводит только матрицу индексов элементов, а матрицу индексов перемещений системы программа формирует сама. В каждом узле по 6 перемещений. Соответственно программа присваивает первому узлу перемещения с 1 до 6, второму с 7 до 12, третьему с 13 до 18 и так далее. Так сформирована матрица индексов **перемещений узлов MIA**, то есть каждому перемещению присваивается свой порядковый номер. Далее в матрице индексов элементов **MIE** каждому номеру узла присваивается 6 номеров

перемещений из матрицы MIA . Так получается матрица индексов перемещений системы MI , играющая ключевую роль в методе конечных элементов (рис. 4). Ранее сказано, что матрица MIE играет роль чертежа.

9 С использованием этой матрицы на рис. 4 программа строит объёмную модель стержневой системы.

Если в системе есть подвесной шарнир или ползун, в которые входит два узла, то надо указать какие из перемещений совпадают, а какие нет. Для этого надо вручную подправить последнюю строку в матрице индексов узлов MIA (рис. 4). **Дополнительный узел должен быть последним в списке узлов.** В тестовом примере дополнительный узел это втулка ползуна (узел 9). Втулка ползуна 9 и ось ползуна 3 имеют одинаковые линейные перемещения вдоль осей Y и Z , и углы поворота вокруг этих же осей. Различные перемещения вдоль оси X и вокруг оси X . В матрице MIA сопоставляем строки 3 и 9 и корректируем последнюю строку (рис.4).

ВНИМАНИЕ

В матрице MIA должны присутствовать все числа от 1 до $max\ n$ (без пропусков).

NU := rows(X) NU = 9 общее число узлов
NE := rows(MIE) NE = 7 общее число элементов

ne := 1..NE nu := 1..NU i := 1..6

$MIA_{nu,i} := 6 \cdot (nu - 1) + i$ матрица индексов перемещений в узлах

Глядя на матрицу MIA , введите строку перемещений в ползуне или шарнире, если они есть. Равные перемещения должны иметь одинаковые номера. Если дополнительных узлов нет, то **выключите два оператора (ниже)**

Концы стержней, сходящихся в шарнире -- это разные узлы.
Ось ползуна и его втулка -- это разные узлы

$N_{доп} := 9$ номер дополнительного узла

$MIA := MIA^T \cdot MIA^{(N_{доп})} := (49 \ 14 \ 15 \ 50 \ 17 \ 18)^T$ $MIA := MIA^T$

Матрица индексов перемещений системы MI

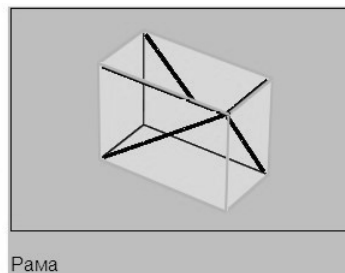
$MI1_{ne,i} := MIA_{MIE_{ne},1,i}$ $MI2_{ne,i} := MIA_{MIE_{ne},2,i}$

процесс размножения перемещений (в каждом узле по 6)

$MI := \text{augment}(MI1, MI2)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	49	14	15	50	17	18
2	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
5	37	38	39	40	41	42	19	20	21	22	23	24
6	25	26	27	28	29	30	19	20	21	22	23	24
7	43	44	45	46	47	48	19	20	21	22	23	24

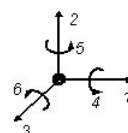
$n := \max(MI)$ $n = 50$ число перемещений в системе



Рама

построена программой

Локальная нумерация перемещений в узле



$MIA =$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	19	20	21	22	23	24
5	25	26	27	28	29	30
6	31	32	33	34	35	36
7	37	38	39	40	41	42
8	43	44	45	46	47	48
9	49	14	15	50	17	18

В матрице MIA должны присутствовать все числа от 1 до максимума MIA (без пропуска)

Рис. 4. Формирование матрицы индексов перемещений системы

Ввести граничные условия в нагрузках и перемещениях (рис. 5).

Ввод вектора сил

$$R_3 := \frac{q \cdot LL_1}{2} \quad M_3 := \frac{q \cdot (LL_1)^2}{12}$$

Расчет эквивалентных нагрузок и ввод их в вектор сил

$$R_3 = 108.17 \quad M_3 = 13$$

$$\beta := \text{atan}\left(\frac{L_3}{L_1 - L_4}\right) \quad \beta = 33.7 \cdot \text{deg}$$

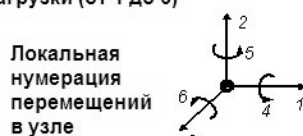
Учет граничных условий в перемещениях

номер перемещения узла 1 2 3 4 5 6

$FF :=$

	1	2
1	$-R_3$	1
2	$-R_3$	9
3	$M_3 \cdot \sin(\beta)$	1
4	$-M_3 \cdot \cos(\beta)$	1
5	M_1	2
6	$-M_3 \cdot \sin(\beta)$	9
7	$M_3 \cdot \cos(\beta)$	9
8	$-F_1$	4
9	$F_2 \cdot \sin(\alpha)$	7
10	$-F_2 \cdot \cos(\alpha)$	7
11	$-M_2$	8
12		6

FF содержит (по столбцам):
1 -- величина нагрузки,
2 -- узел, где приложена сила,
3 -- локальный номер узловой нагрузки (от 1 до 6)



Локальная нумерация перемещений в узле

$n = 50$ $i := 1..n$

$k := 1..rows(FF)$ $F_i := 0$

$F_{MIA_{FF,k,2},FF,k,3} := FF_{k,1}$

$Gu := \text{submatrix}(Gu, 1, rows(Gu), 2, 7)$

$Gu :=$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	1
9	1	1	1	1	1	1	1

Длины элементов

$LL =$

	1
1	72
2	60
3	20
4	25
5	75
6	40
7	72

- см

Рис. 5. Ввод в расчет граничных условий в нагрузках и перемещениях

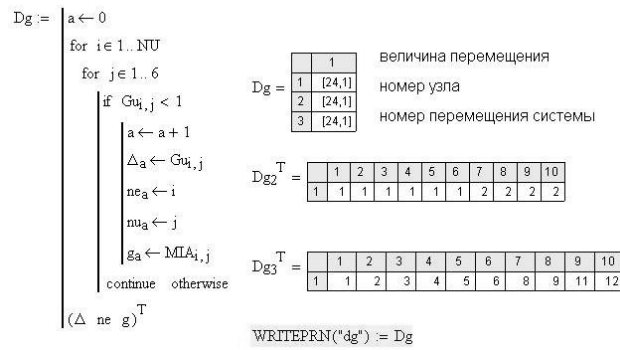


Рис. 6. Перенумерация граничных условий в перемещениях

Ввести матрицу граничных условий Gu в перемещениях (рис. 5, справа), то есть указать закрепления стержневой системы. На том же рисунке длины элементов LL , рассчитанные программой.

В программе граничные условия перенумеровываются в соответствии с матрицей индексов перемещений системы MI . Это делает подпрограмма Dg (рис.6).

Ввести вектор сил. В начале программы (рис. 3, вверху) введены заданные нагрузки. Далее надо ввести матрицу внешних нагрузок FF с листа подготовки данных (рис.2). Это еще не вектор сил F , а только ввод внешних нагрузок. Размер вектора сил $\{F\}$ равен размеру вектора узловых перемещений $\{\Delta\}$. Программа обнуляет весь вектор сил, а затем введенным в матрицу FF нагрузкам присваивает номер позиции в векторе сил F в соответствии с матрицей индексов узловых перемещений MIA (рис.5, слева).

Распределенную нагрузку надо заменить эквивалентными силами, приложенными в узлах системы. То есть для элемента с распределенной нагрузкой определить эквивалентные силу R_3 и эквивалентный момент M_3 . В каждом варианте задания среди внешних сил есть одна распределенная нагрузка, ее надо заменить эквивалентными нагрузками, приложенными в узлах.

Если рассмотреть элемент как балку, заделанную с двух концов, то в качестве эквивалентной нагрузки берем реакции в заделках с обратным знаком. Такие реакции можно найти методом сил. Если распределенная нагрузка вызывает изгиб элемента, то $R_3 = \frac{ql}{2}$ и $M_3 = \frac{ql^2}{12}$. Для расчета системы методом конечных элементов вместо распределенной нагрузки к ней прикладываются эквивалентные нагрузки, приведенные к узлам системы. Эти нагрузки надо разложить по **глобальным** направлениям узловых перемещений системы (рис. 7). Для определения направления эквивалентных нагрузок используйте следующее правило:

ПРАВИЛО

Положительный вектор момента направлен так, что, глядя с конца вектора, видим вращение против часовой стрелки. Перемещение балки от действия эквивалентных нагрузок должно иметь то же направление, что и от распределенной нагрузки.

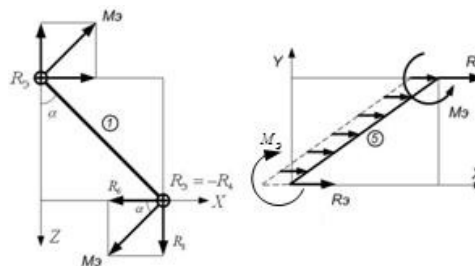


Рис. 7. Две схемы для ввода эквивалентной нагрузки в вектор сил

Рассмотрим определение эквивалентных нагрузок для рассматриваемой системы. На элемент 1 (рис. 1). действует распределенная нагрузка, параллельная оси Y и перпендикулярная продольной оси элемента 1. Рассмотрим проекцию элемента на плоскость XZ (вид сверху на систему) (рис. 7, слева). Эквивалентная сила R_3 проектируется в точку (уходящая от нас сила обозначена крестиком в кружочке).

Вектор эквивалентного момента M_3 перпендикулярен распределенной нагрузке. Раскладываем его на две проекции в направлении перемещений системы в данном узле (вдоль глобальных осей X и Z). Эти проекции добавляются к внешним нагрузкам по этим направлениям.

ПРИМЕЧАНИЕ

11

В начале элемента 1 (узел 1) стоит заделка. Эквивалентные нагрузки в заделке становятся опорными реакциями. Их можно не вводить в расчёт. Они не влияют на напряжения и деформации в стержнях.

Рассмотрим другой возможный случай приложения распределенной нагрузки. Пусть на элемент 5 действует распределенная нагрузка, лежащая в плоскости XY параллельно оси X . Расчет эквивалентных нагрузок от нее показан на рис. 7, справа. Разложение векторов на проекции здесь не требуется, так как вектор момента направлен вдоль глобальной оси Z .

На этом заканчивается начальная часть программы МКЭ-доп-расчеты.xmcd — ввод исходных данных. Остальные исходные данные: форма и размеры поперечных сечений элементов, а также материал и его свойства будут введены позднее с Пульта управления (рис. 10).

Программа должна обработать те данные, что уже введены.

Расчет матрицы направляющих косинусов. Вначале определяются косинусы Lx углов между локальной осью x (продольной осью элемента) и глобальными осями X, Y, Z (рис. 8). Для этого определяются проекции элементов $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ на глобальные оси, как разности координат начала и конца элемента. Затем

определяется длина элементов $L = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$ и угол между осями x локальная и X глобальная

$$\cos(x \wedge X) = \frac{\Delta X}{L}.$$

Для определения косинусов углов между локальными осями y и z и глобальными осями X, Y, Z используется оператор векторного произведения. Напомним, что проекции единичного вектора (орта) на оси координат равны косинусам углов между ортом и осями координат. Векторное произведение двух векторов есть третий вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной плоскости перемножаемых векторов.

По умолчанию принимается, что ось y локальная должна лежать в плоскости осей Y глобальная и x локальная. Для этого в скрытой зоне определения длин элементов для каждого элемента введена третья точка, лежащая в указанной плоскости.

Вначале вычисляется векторное произведение $Lz = Ly \times Lx$. Поскольку третья точка, введенная для каждого элемента, вводится произвольно в плоскости $Y-x$, то угол между векторами не равен 90° , а модуль не равен единице. В программе определяется поправочный коэффициент mn , который приводит длину векторного произведения к единице и соответственно угол между осями будет равен 90° . Далее векторное произведение $Ly = Lz \times Lx$ позволяет определить остальные направляющие косинусы.



Рис. 8. Определение углов между локальными и глобальными осями

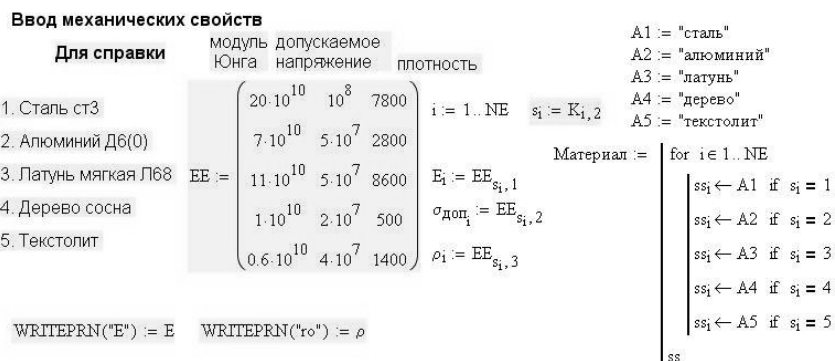


Рис. 9. Механические свойства материалов стержней

Учет механических свойств материала стержней. Согласно заданию, элементы-стержни изготовлены из различных материалов. Материал для каждого элемента расчетчик выбирает сам, исходя из конструктивных соображений. Свойства используемых материалов в виде справочной таблицы приведены в программе МКЭ-доп-расчеты (рис. 9). В программе расчета понадобятся модуль Юнга E , допускаемое напряжение для материала стержня $[\sigma]$, а также плотность материала ρ для проведения динамических расчетов.

В прочностных расчётах стержневых систем используются формулы сопротивления материалов, не требующие определения деформаций. Коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G в расчётах не используются.

С пульта управления (рис. 10) вводится матрица K , первый столбец которой — номер элемента, второй — код материала, а третий — код формы сечения. По коду материала в программе каждому элементу присваиваются численные значения его свойств. Они вводятся в виде векторов E , $\sigma_{\text{доп}}$, ρ , записываются в отдельный файл функцией WRITEPRN и передаются в основную программу МКЭ-простран.xmcd.

Пульт управления

ввод размеров поперечных сечений

В матрице K первая колонка -- номер элемента, вторая -- код материалов, третья -- форма сечения: прямоугольные $K = 1$, круглые $K = 2$, сложное сечение $K = 3$. Введите численные значения моментов инерции для $K = 4$.

Коды рекомендуемых материалов:
 1. сталь Ст3
 2. алюминий
 3. латунь мягкая Л68
 4. дерево (сосна)
 5. текстолит

Материал_и_сечение =

	1	2
1	"латунь"	"сложное"
2	"сталь"	"круглое"
3	"сталь"	"круглое"
4	"алюминий"	"прямоугольное"
5	"алюминий"	"прямоугольное"
6	"сталь"	"уголок"
7	"алюминий"	"круглое"

Если код формы сечения $K = 4$, введите численные значения площади, моментов инерции и моментов сопротивления из сортамента прокатной стали

$J_4 = (0.051 \ 1.45 \ 1.45)^T \cdot \text{см}^4$ $W_4 = (0.17 \ 0.67 \ 0.67)^T \cdot \text{см}^3$ $AA_4 = 1.74 \cdot \text{см}^2$

масса конструкции: $m = 2.99 \text{ кг}$

Результаты расчета

Максимальные эквивалентные напряжения в начале и в конце элемента

максимальные перемещения в элементах вдоль локальных осей X, Y, Z

собственные частоты

	1	2
1	12	18
2	81	85
3	85	76
4	0	38
5	38	11
6	19	38
7	58	16

МПа

	1
1	50
2	100
3	100
4	70
5	70
6	100
7	70

МПа

	1	2	3
1	0	1.34	0.01
2	0.04	1.18	0.01
3	0.04	1.08	0.01
4	0	3.07	0.06
5	0	3.68	0.11
6	0	0.05	0.04
7	0.04	0.07	2.27

мм

	1
1	19.4
2	30.1
3	55.5
4	81.7
5	89.9
6	116.2
7	151.5

Гц

Рис. 10. Пульт управления расчетами

Все действия по созданию расчетной модели, указанные выше, спрятаны в закрытые зоны. В итоговом документе (пояснительной записке к курсовой работе) они не нужны.

Расчет геометрических характеристик сечений. Сечения элементов могут быть круглые, прямоугольные (сплошные и полые) и абсолютно произвольные.

Размеры круглых (кольцевых) и прямоугольных сечений вводятся в матрицу BD . Для полых стержней прямоугольного сечения задается толщина стенки δ , для круглых полых стержней — внутренний диаметр трубы d .

Далее внутри программы МКЭ-доп-расчеты.xmcd рассчитываются геометрические характеристики сечений для прямоугольных и круглых сечений. Вначале из матрицы размеров сечений BD (рис. 10,верху) считываются размеры прямоугольных и круглых сечений b, h, δ, D, d и передаются в подпрограммы расчета площади, моментов инерции и моментов сопротивления (рис. 11), находящиеся в скрытой зоне программы МКЭ-доп-расчеты.

Для расчета момента инерции $J_x = J_k$ и момента сопротивления $W_x = W_k$ при кручении стержней прямоугольного сечения надо знать коэффициенты α, β, γ , спрятанные в закрытой зоне.

Моменты инерции сложного сечения передаются из программы МКЭ-Пуассон.xmcd в программу МКЭ-доп-расчёты.xmcd.

Моменты инерции прокатного профиля (уголка) определяются из сортамента прокатной стали и вводятся расчётчиком в матрицы J_4, W_4 и AA_4 на пульте управления (рис.10).

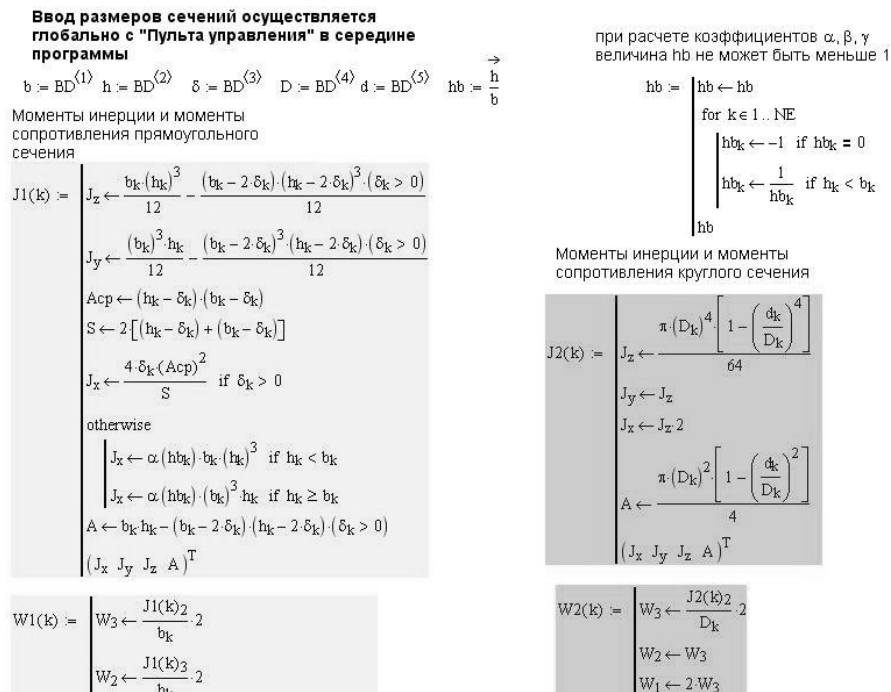


Рис. 11. Подпрограммы расчета геометрических характеристик круглого и прямоугольного сечений

Результаты расчета геометрических характеристик всех сечений объединяются в единые матрицы JJ и WW и с помощью функции **WRITEPRN** записываются в файл «JJ.rpn» и считываются оттуда программой **МКЭ-простран.xmcd**.

2.2. Расчет стержневой системы

Для проведения расчета пространственной стержневой системы методом конечных элементов открыть на компьютере все три программы: **МКЭ-простран**, **МКЭ-доп-расчеты**, **МКЭ-ПУАССОН**.

СОВЕТ

Оперативный переход от одной программы к другой осуществляется нажатием сочетания клавиш **CTRL+F6**.

Для быстрого пересчета всей программы используйте сочетание клавиш **CTRL+F9**.

Ввод исходных данных в основную программу **МКЭ-простран** происходит автоматически путем считывания функцией **READPRN** из файлов, куда их записала вспомогательная программа **МКЭ-доп-расчеты**.

В скрытой зоне находятся стандартные матрицы жесткости, масс, направляющих косинусов, в которых используются переданные из программы **МКЭ-доп-расчеты** данные для расчета.

Далее записаны основные уравнения, используемые в методе конечных элементов. Формируется матрица жесткости системы, решается основное уравнение МКЭ, определяются внутренние усилия и перемещения в каждом элементе (рис.12). Обратите внимание, что практически весь алгоритм метода конечных элементов укладывается всего в несколько Mathcad-операторов.

```

i := 1..n    j := 1..n    Ki,j := 0    k := 1..N    i := 1..12    j := 1..12

Статический расчет стержневой системы
Матрица жесткости элемента в глобальных координатах    KEG(k,i,j) := (TkT · KEk · Tk)i,j

матрица жесткости системы    K(MIk,i, MIk,j) := K(MIk,i, MIk,j) + KEG(k,i,j)

учет граничных условий в перемещениях
граничные условия    Dg := READPRN("dg.prm")    g := Dg3    Δg := Dg1
Метод Пиано учета граничных условий    i := 1..rows(g)    j := 1..n

Kgi,gi := Kgi,gi · 1010    Fgi := Kgi,gi · Δg

Узловые перемещения системы    Δ := K-1 · F
k := 1..N    j := 1..12
Узловые перемещения элементов в глобальных координатах    Δej,k := Δ(MIk,j)
Узловые перемещения элементов в локальных координатах    Δe(k) := Tk · Δe(k)
Усилия в элементах в локальных координатах    F1(k) := KEk · Δe(k)

```

Рис. 12. Статический расчет стержневой системы

Результаты расчета в программе **МКЭ-простран** автоматически записываются в выходные файлы, откуда их считывает программа **МКЭ-доп-расчеты**. Нажав на клавиатуре сочетание клавиш **CTRL+F6**, перейдите в программу **МКЭ-доп-расчеты**.

Чтобы результаты расчета в основной программе **МКЭ-простран** вступили в силу, надо пересчитать программу **МКЭ-доп-расчеты**. Для этого удобно использовать сочетание клавиш **CTRL+F9**. Закройте все раскрытые зоны для быстрого перемещения по программе.

Подбор размеров сечений элементов

Перейдите в программе **МКЭ-доп-расчеты** на раздел «Пульт управления» (рис. 10). Этот блок позволяет быстро изменять параметры и просматривать результаты расчета.

Для выполнения расчета надо:

- 1) После ввода всех исходных данных в программе **МКЭ-доп-расчеты** нажать сочетание клавиш **CTRL+F9** для пересчета всей программы и записи всех данных во внешние файлы;
- 2) Перейти в основную программу расчета **МКЭ-простран**, нажав сочетание клавиш **CTRL+F6**;
- 3) Нажать **CTRL+F9** для пересчета всей программы, при этом происходит считывание исходных данных из внешних файлов, выполнение расчета в основной программе и запись результатов расчета во внешние файлы;
- 4) Вернуться в программу **МКЭ-доп-расчеты**, нажав **CTRL+F6**;
- 5) Пересчитать программу, нажав **CTRL+F9**, для считывания результатов расчета в основной программе из внешних файлов и проведения всех дополнительных расчетов;
- 6) Посмотрев результаты расчета (на пульте управления), скорректировать размеры сечений и материал стержней;
- 7) Повторить пункты 1 – 5.

На **Пульт управления** (рис. 10) выведены результаты расчета: максимальное эквивалентное напряжение в начале и в конце каждого элемента, максимальные линейные перемещения стержней вдоль локальных осей x , y , z каждого элемента, собственные частоты колебаний стержневой системы, масса системы.

Подпрограммы для расчета максимальных эквивалентных напряжений помещены в скрытую зону и показаны на рис. 13. Обратите внимание, что все формулы для расчета эквивалентных напряжений знакомы вам из курса сопротивления материалов. Поскольку все силы прикладываются в узлах стержневой системы, то эпюры $M_{изг}$ прямолинейные и опасным сечением является один из концов элемента.

$$M_k(k) := \begin{pmatrix} F14,k \\ F10,k \end{pmatrix} \quad M_y(k) := \begin{pmatrix} F15,k \\ F11,k \end{pmatrix} \quad M_z(k) := \begin{pmatrix} F16,k \\ F12,k \end{pmatrix}$$

$$M_k(x,k) := M_k(k)_x \quad M_y(x,k) := M_y(k)_x \quad M_z(x,k) := M_z(k)_x$$

$$\sigma_{\text{крут}}(x,k) := \frac{\sqrt{M_k(x,k)^2 + M_y(x,k)^2 + 0.75 \cdot M_z(x,k)^2}}{W_{\text{крут}}(k)}$$

$$\sigma_{\text{прямой}}(x,k) := \begin{cases} \sigma_1 \leftarrow \frac{|M_y(x,k)|}{W_{\text{прям}}(k)} + \frac{|M_z(x,k)|}{W_{\text{прям}}(k)} \\ \text{if } h_k \geq b_k \\ \sigma_2 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_y(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_k(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2} \\ \sigma_3 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_z(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2 + 3 \cdot \gamma \left(\frac{h_k}{b_k}\right) \left(\frac{M_k(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2} \\ \text{if } h_k < b_k \\ \sigma_2 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_z(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_k(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2} \\ \sigma_3 \leftarrow \sqrt{\left(\frac{M_y(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2 + 3 \cdot \gamma \left(\frac{b_k}{h_k}\right) \left(\frac{M_k(x,k)}{W_{\text{прям}}(k)}\right)^2} \\ \text{"выбор максимального напряжения"} \\ \max \sigma \leftarrow \max(\sigma) \\ \max \sigma \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{сплож}}(x,k) := \begin{cases} \text{for } kk \in 1..NU1 \\ \sigma_{kk,x} \leftarrow \frac{M_z(x,k)}{J_{zc}} \cdot y_{kk} + \frac{M_y(x,k)}{J_{yc}} \cdot z_{kk} \\ \tau_{kk,x} \leftarrow \frac{M_k(x,k)}{W_{kc}} \cdot y_{kk} \\ \text{"по Мизесу"} \\ \sigma_{3,kk} \leftarrow \sqrt{(\sigma_{kk,x})^2 + 3 \cdot (\tau_{kk,x})^2} \\ kl_{kk} \leftarrow kk \\ \max \sigma_3 \leftarrow \max(\sigma_3) \\ (\sigma \quad \tau \quad \sigma_3 \quad \max \sigma_3 \quad kl \quad \gamma)^T \end{cases}$$

Если $K = 4$, и сечение равнобокий уголок, то опасной точкой скорее всего станет конец полки уголка, так как такое сечение очень плохо работает на кручение,

$$\max \sigma_4(x,k) := \frac{|M_y(x,k)|}{W_4^{(2)}} + \frac{|M_z(x,k)|}{W_4^{(3)}}$$

$$\max \sigma_4(x,k) := \max \sigma_4(x,k)_1$$

$$\max \sigma_3 := \begin{cases} \text{for } x \in 1..2 \\ \text{for } k \in 1..NE \\ \sigma_{\sigma,k,x} \leftarrow \sigma_{\text{прямой}}(x,k) \text{ if } K_{k,3} = 1 \\ \sigma_{\sigma,k,x} \leftarrow \sigma_{\text{крут}}(x,k) \text{ if } K_{k,3} = 2 \\ \sigma_{\sigma,k,x} \leftarrow \sigma_{\text{сплож}}(x,k)_4 \text{ if } K_{k,3} = 3 \\ \sigma_{\sigma,k,x} \leftarrow \max \sigma_4(x,k) \text{ if } K_{k,3} = 4 \\ \sigma \sigma \end{cases}$$

Рис. 13. Расчет максимальных эквивалентных напряжений в сечениях элементов

Если напряжение или перемещение превышают допустимые величины, необходимо увеличить размеры сечения соответствующего элемента. Если напряжения намного меньше допустимых, надо уменьшить размеры сечений. Для малонагруженных стержней размеры сечения принимаются конструктивно.

Для уменьшения массы конструкции сплошное сечение можно заменить полым (круглым или прямоугольным) и варьировать толщину его стенок.

Изменив размеры сечений стержней, введите изменения в расчет, нажав CTRL+F9.

Вернитесь в программу МКЭ-простран, нажав сочетание клавиш CTRL+F6. Пересчитайте основную программу, нажав сочетание клавиш CTRL+F9. Вернитесь в программу МКЭ-доп-расчёты, нажав сочетание клавиш CTRL+F6. Пересчитайте программу, нажав сочетание клавиш CTRL+F9. Посмотрите новые результаты расчета. Обратите внимание на то, что с уменьшением жесткости уменьшается первая собственная частота системы.

После каждого пересчета вы можете увидеть на пульте управления результат пересчета: таблицу максимальных эквивалентных напряжений в начале и в конце каждого элемента (рис. 10).

Определение перемещений стержневой системы

Теперь **скорректируем жесткость системы**. Поставим условие жесткости:

- Максимальный прогиб любого элемента в любом направлении не должен превышать 2 – 3 мм.

Mathcad строит графики перемещений, используя уравнение связи $\{u\} = [N]\{\Delta\}$.

Здесь $\{u\}$ — вектор перемещений в произвольной точке элемента по трем осям координат, $\{\Delta\}$ — вектор узловых перемещений элемента из 12 компонент. Тогда $[N]$ — прямоугольная матрица функций формы размерностью 3×12 . Уравнение связи и функции формы для пространственной стержневой системы, представляющие собой уравнение упругой линии стержня, приведены на рис. 14.

Построенные с использованием функций формы виды стержневой системы до и после деформации показаны на рис. 15.

$$N1(x,L) := 1 - \frac{x}{L} \quad N2(x,L) := \frac{x}{L} \quad N3(x,L) := 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} - 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} + 1$$

$$N4(x,L) := \frac{x^3}{L^2} - 2 \cdot \frac{x^2}{L} + x \quad N5(x,L) := -2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} \quad N6(x,L) := \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

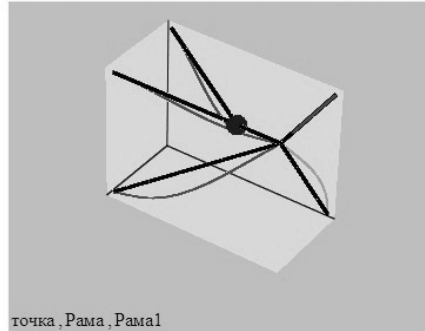
$$Nff(x,L) := \begin{pmatrix} N1(x,L) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N2(x,L) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N3(x,L) & 0 & 0 & 0 & N4(x,L) & 0 & N5(x,L) & 0 & 0 & 0 & N6(x,L) \\ 0 & 0 & N3(x,L) & 0 & -N4(x,L) & 0 & 0 & 0 & N5(x,L) & 0 & -N6(x,L) & 0 \end{pmatrix}$$

$$U(x,i) := 1000 \cdot Nff(x,L_i,L_i) \cdot \Delta e^{(i)}$$

перемещения переведены в мм

Рис. 14. Расчет перемещений элементов с помощью функций формы

KSS = 30 коэффициент увеличения перемещений



чёрный цвет -- рама без нагрузок
красный цвет -- рама под нагрузкой
синий цвет -- опасная точка

Максимальные перемещения в каждом элементе вдоль локальных осей 1 -- x, 2 -- y, 3 -- z

	1	2	3	
1	0	2.43	0.01	
2	0.04	1.2	0.01	
3	0.04	1.1	0.01	
4	0	3.08	0.06	
5	0	3.7	0.11	
6	0	0.05	0.04	
7	0.04	0.07	2.28	

 u_{\max}

·мм

Рис. 15. Вид стержневой системы до и после деформации

Для проверки выполнения условия жесткости в программе МКЭ-доп-расчеты на пульт управления (рис.10) выведены максимальные перемещения элементов вдоль локальных осей X, Y, Z. Для уменьшения перемещений надо увеличить размеры сечений элементов или выбрать более жесткий материал.

ВНИМАНИЕ

Для каждого элемента должно удовлетворяться одновременно и условие прочности и условие жесткости.

Исследование динамического поведения системы

В программе МКЭ-простран, кроме статического, проводится и динамический расчет стержневой системы. Определяется вектор собственных частот и спектр собственных векторов системы. Определите собственные частоты колебаний стержневой системы без сосредоточенной массы и с сосредоточенной массой 10 кг. Для ввода в расчет сосредоточенной массы введите ее величину и укажите номер узла, в котором она приложена (рис. 16). При этом корректируется матрица масс ситемы. Нажав сочетание клавиш CTRL+F9, пересчитайте задачу.

На рис. 16 показан динамический расчет стержневой системы. Здесь определяются вектор собственных частот Ω и спектр собственных векторов Λ . Эти величины вычисляются при решении уравнения свободных незатухающих колебаний $[M]\{\Delta''\} + [K]\{\Delta\} = 0$. В этом уравнении матрица масс элемента находится в закрытой зоне программы МКЭ-простран. Матрица масс системы $[M]$ формируется с помощью матрицы индексов аналогично матрице жесткости $[K]$.

Спектр собственных векторов определяет форму колебаний системы. Другими словами, это вид упругой линии элементов стержневой системы в процессе колебаний при резонансе на каждой собственной частоте. Для построения вида системы в процессе колебаний в нашем примере мало конечных элементов (в отличие от системы ANSYS, которые наглядно демонстрируют вид системы в процессе колебаний).

Динамический расчет

Учет сосредоточенных масс Введите

Сосредоточенную массу $m_0 := 10$ кг номер узла, в котором она приложена $nm_0 := 3$ номера перемещений, по которым колеблется масса m_0

$$i2 := 1..3 \quad i1_{i2} := MIA_{nm_0, i2} \quad i1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

 $k := 1..N \quad i := 1..n \quad j := 1..n \quad MM_{i,j} := 0 \quad i := 1..12 \quad j := 1..12$ матрица масс системы $MM_{(M_{k,i}, M_{k,j})} := MM_{(M_{k,i}, M_{k,j})} + (MME_k)_{i,j}$ Учет сосредоточенной массы $MM_{i1_{i2}, i1_{i2}} := MM_{i1_{i2}, i1_{i2}} + m_0$ Вектор собственных частот $\Omega := \text{genvals}(K, MM) \quad \Omega := \text{sort}(\Omega) \quad \Omega := \sqrt{\Omega}$ Спектр собственных векторов $\Lambda := \text{genvecs}(K, MM) \quad i := 2..7 \quad \Omega := \text{submatrix}(\Omega, 1, 7, 1, 1)$ Если Mathcad выводит комплексное число Ω , включите это выражение $\Omega_{i-1} := \Omega_i^*$ $\Omega_{\text{репц}} := \frac{\Omega}{2 \cdot \pi}$ **Вынужденные колебания. Прямое интегрирование**Амплитуда вынуждающей силы $Q_0 := FF$ Период колебаний $T1 := \frac{1}{\Omega_{\text{репц}_1}}$ Время наблюдения колебаний $t_k := n1 \cdot T1$ $T1 = 0.044$ секПриращение времени $\Delta t := \frac{T1}{n1}$ Первая собственная частота $\Omega_{\text{репц}_1} = 22.7$ Синусоидальная нагрузка $\nu := \Omega_1$ резонанс $\nu := \Omega_1 \cdot 0.5$ Чтобы выйти из резонанса, включите это выражение $\Omega_{\text{репц}} =$

	1
1	22.7
2	29.6
3	73.4
4	78.1
5	93.9
6	157.3
7	173.7

Рис. 16. Динамический расчет стержневой системы

Расчет системы при вынужденных колебаниях ведется путем непосредственного интегрирования уравнения движения $[M]\{\Delta''\} + [H]\{\Delta'\} + [K]\{\Delta\} = \{F(t)\}$ при вынужденных затухающих колебаниях методом Ньюмарка. Программа решения этого уравнения помещена в скрытую зону.

Необходимая для расчёта матрица затухания колебаний $[H]$ рассчитывается по формуле, включенной в ANSYS $[H] = \beta_1 \cdot [K] + \beta_2 \cdot [M]$. Здесь β_1 и β_2 — эмпирические коэффициенты. Эти коэффициенты кажутся несопоставимыми по величине, но это различие вызвано размерностями коэффициентов в системе СИ. Если $K_{i,j} \approx 10^{10}$, то $M_{i,j} \approx 10$. В примере $\beta_1 = 0,001$, а $\beta_2 = 5$.

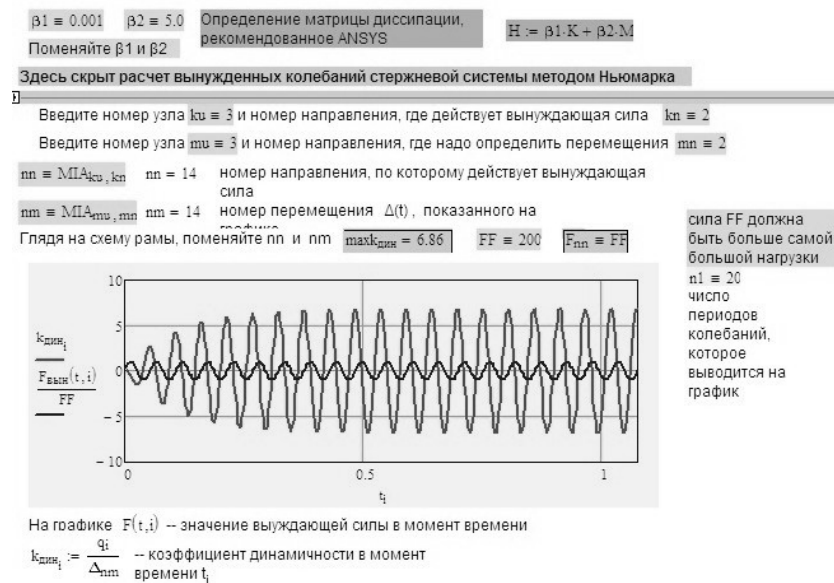


Рис. 17. Определение коэффициента динамичности при резонансе

Для расчета надо ввести величину и направление действия вынуждающей силы FF (рис. 17) в узле, где приложена сосредоточенная масса. Определить коэффициент динамичности системы в момент резонанса на первой собственной частоте при действии гармонической (синусоидальной) нагрузки. Направление действия силы — вдоль одной из глобальных осей координат (по смыслу). Величина амплитуды вынуждающей силы FF должна быть сопоставима с величиной остальных внешних нагрузок. Посмотрите, как меняется коэффициент динамичности в зависимости от величины вынуждающей силы и коэффициентов затухания колебаний β_1 и β_2 . Примите к сведению, что пропорционально коэффициенту динамичности возрастут и напряжения в соседних с узлом элементах. В то же время в других узлах коэффициент динамичности будет совсем другим и чаще всего меньше единицы.

В качестве вынуждающей силы предлагаются три нагрузки: гармоническая (по синусоиде), пилообразная и прямоугольная. Поменяйте вид нагрузки. Посмотрите, как изменится отклик системы на вынуждающую нагрузку. Посмотрите, как резко уменьшается коэффициент динамичности при выходе из резонанса.

На этом первая часть курсовой работы заканчивается. Далее надо один из элементов сделать со сложным поперечным сечением, для которого моменты инерции определяются в программе МКЭ-Пуассон.xmcd.

2.3. Расчет на кручение стержня сложного поперечного сечения

Расчет проводится с целью определить момент инерции и момент сопротивления при кручении стержня сложного сечения, используя решение уравнения Пуассона.

Эта не самая актуальная задача важна тем, что демонстрирует возможность решения уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = Const$, имеющего множество приложений в науке и технике, методом конечных элементов, записав уравнение Пуассона в виде основного уравнения МКЭ $[K]\{\Phi\} = \{F\}$. При кручении стержня произвольного сечения уравнение Пуассона имеет вид $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0$. Тогда распределение касательных напряжений в сечении $\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и $\tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Задаваясь относительным углом закручивания θ , определяются крутящий момент M_k , касательные напряжения τ и геометрические характеристики при кручении $J_k = \frac{M_k}{G \cdot \theta}$ и $W_k = \frac{M_k}{\tau_{\max}}$, которые уже не

зависят от заданного угла θ .

- 18 Для определения функции напряжений φ в виде ее узловых значений Φ поперечное сечение стержня надо разбить на конечные элементы. В программе расчета МКЭ-Пуассон используется треугольный линейный элемент, дающий самое простое решение. Правда, общее количество элементов гораздо больше, чем при использовании квадратичных элементов, а точность расчетов ниже.

Построение сетки конечных элементов

Для расчета геометрических характеристик сечения сложной формы откройте программу МКЭ-Пуассон. В начале программы введите размеры поперечного сечения, заданные в исходных данных к курсовой работе (рис. 18).

см := 0.01 МПа := 10^6 Нм := 1 мм := 0.001 квазиразмерности ORIGIN := 1

Исходные размеры сечения R := 30-мм a1 := 20-мм a2 := 15-мм a3 := 10-мм

RR1 := R RR2 := a1 RR3 := a2 RR4 := a3 WRITEPRN("section") := RR a := READPRN("aa.prm") a := a1

Масштабный коэффициент a = 0.5 из программы МКЭ-доп-расчеты

Создание сетки конечных элементов

Координаты точек на контуре сечения

Верхняя линия c := 0.001-мм

Y1 := (0 10 10 27 30 27 10 10 0)^T · а-мм

Z1 := (0 3 20 20 + c 30 40 40 + c 57 60)^T · а-мм

Нижняя линия

Y2 := (0 -10 -10 -27 -30 -27 -10 -10 0)^T · а-мм

Z2 := (0 3 20 20 + c 30 40 40 + c 57 60)^T · а-мм

сдвиг точек на малую величину c = 0.001 мм необходим, если координата z двух точек одинакова

y1(z) := linterp(Z1, Y1, z) y2(z) := linterp(Z2, Y2, z)

Здесь скрыт расчет осевых моментов инерции сложного сечения [Методические указания ссылка](#)

Здесь скрыто создание сетки конечных элементов

G := $8 \cdot 10^{-4}$ МПа сталь в этой программе результат не зависит от величины G

Рассмотрим решение уравнения Пуассона для $\theta = 1$ градус $\theta := 1 \cdot \frac{\pi}{180}$

Рис. 18. Начало расчета моментов инерции сечения сложной формы

Для заданного сечения надо ввести координаты точек на контуре и с помощью функции интерполяции получить уравнение контура сечения для последующего интегрального вычисления геометрических характеристик. Mathcad требует, чтобы элементы аргумента функции *interp* (в нашем случае Z1 и Z2 горизонтальная ось) были **расположены в возрастающем порядке**. Поэтому контур разбит на две части: верхнюю и нижнюю и надо вводить отдельно координаты точек верхней и нижней линий контура сечения. Получение уравнений верхнего и нижнего контуров сечения показано на рис. 18.

Если задано сечение с отверстием, то надо получить уравнения двух контуров — наружного и внутреннего (рис. 19).

Координаты точек на контуре сечения

Верхняя линия

Z1 := (0 c 16 16 + c)^T · а-мм

Y1 := (0 8 8 0)^T · а-мм

Z3 := (4 4 + c 12 12 + c)^T · а-мм

Y3 := (0 4 4 0)^T · а-мм

Нижняя линия

Z2 := (0 c 16 16 + c)^T · а-мм

Y2 := (0 -8 -8 0)^T · а-мм

Z4 := (4 4 + c 12 12 + c)^T · а-мм

Y4 := (0 -4 -4 0)^T · а-мм

Наружный контур

Внутренний контур

сдвиг точек на малую величину c необходим, если координата z двух точек одинакова

y1(z) := linterp(Z1, Y1, z) · (z ≤ max(Z1)) y2(z) := linterp(Z2, Y2, z) · (z ≤ max(Z2))

y3(z) := linterp(Z3, Y3, z) · (z ≤ max(Z3)) y4(z) := linterp(Z4, Y4, z) · (z ≤ max(Z4))

Рис. 19. Ввод в расчёт сечения с отверстием

Для создания сетки конечных элементов используется прямоугольный планшет. На рис. 20 показаны узлы планшета (крест) и узлы сложного сечения (красный круг). Число рядов и столбцов планшета вводится расчетчиком глобально (в конце программы около графика сечения для быстрого пересчёта программы). Подпрограммы, помещенные в скрытую зону, определяют узлы планшета, которые находятся за пределами контура сложного сечения.

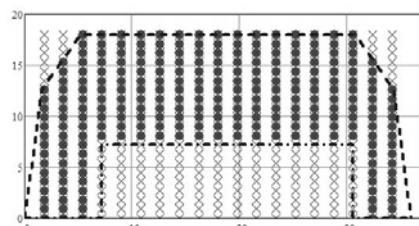


Рис. 20. Узлы планшета и сложного сечения

Далее составляется матрица индексов, из которой вычёркиваются ячейки, содержащие номера узлов, находящихся за пределами сложного сечения. После этого определяются граничные условия, то есть составляется список узлов на контуре сечения, в которых функция напряжений $\Phi = 0$.

Решение уравнения Пуассона

Решение уравнения Пуассона и расчет касательных напряжений при кручении стержня сложного сечения в основной программе МКЭ-Пуассон — это основное, что должен усвоить студент. Находящиеся там выражения полностью соответствуют главе 7 курса лекций Макаров Е.Г. «Метод конечных элементов в прочностных расчётах». Они показаны на рис. 21.

Целью расчета является определение момента инерции и момента сопротивления стержня при кручении, а также распределение касательных напряжений в сечении стержня. Результаты расчета и операторы передачи их в программу МКЭ-доп-расчеты показаны на рис. 22.

Расчет произведен для относительного угла закручивания стержня $\theta = 1$ град/м. При реальном нагружении стержня угол закручивания может быть любым. При упругом нагружении справедлив закон Гука и касательные напряжения, как и крутящий момент, пропорциональны углу закручивания. А вот соотношение напряжений $\gamma = \tau/\tau_{\max}$ в различных узлах сечения не зависит от величины крутящего момента. Как и следовало ожидать, максимальное напряжение τ_{\max} действует во внутреннем угле сечения, где концентрация напряжений максимальная.

формирование матрицы жесткости элемента $k := 1..NE \quad i := 1..NU \quad j := 1..NU$ В контекстном меню выберите Square Matrix Determinant

$$a(k) := \begin{bmatrix} (-z)_{MPU_{k,2}} + z_{MPU_{k,3}} \\ (-z)_{MPU_{k,3}} + z_{MPU_{k,1}} \\ (-z)_{MPU_{k,1}} + z_{MPU_{k,2}} \end{bmatrix} \quad b(k) := \begin{bmatrix} y_{MPU_{k,2}} - y_{MPU_{k,3}} \\ y_{MPU_{k,3}} - y_{MPU_{k,1}} \\ y_{MPU_{k,1}} - y_{MPU_{k,2}} \end{bmatrix} \quad A_k := 0.5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{MPU_{k,1}} & y_{MPU_{k,1}} \\ 1 & z_{MPU_{k,2}} & y_{MPU_{k,2}} \\ 1 & z_{MPU_{k,3}} & y_{MPU_{k,3}} \end{bmatrix}$$

Площади элементов

матрица жесткости системы $k := 1..NE \quad i := 1..NU \quad j := 1..NU \quad K_{i,j} := 0$ обнуление матрицы K

Суммирование коэффициентов жесткости по матрице индексов

$$i := 1..3 \quad j := 1..3 \quad K_{MPU_{k,i}, MPU_{k,j}} := K_{MPU_{k,i}, MPU_{k,j}} + KE(k)_{i,j}$$

учет граничных условий (принцип Пиано) на контуре F=0

$$i1 := 1..Ng \quad K_{(g_{i1}), g_{i1}} := K_{(g_{i1}), g_{i1}} \cdot 10^8 \quad P_{g_{i1}} := 0$$

ввод вектора правых частей

$$k := 1..NE \quad PE := \frac{2}{3} \cdot G \cdot \theta \cdot A \quad j := 1..NU \quad P_j := 0 \quad P_{MPU_{k,i}} := P_{MPU_{k,i}} + PE_k$$

Смените условие задачи: действие точечного заряда (источника тепла). Включите следующие 2 выражения

$P_j := 0$ обнуление вектора правых частей

$P_{103} := 100$ точечный заряд в узле 103 (поменяйте номер)

Два метода решения основного уравнения МКЭ (определение узловых значений функции напряжений)

Метод Холесского $\Phi := MCHB(K, P, 1..NU, JN)$ Обращение матрицы $\Phi := K^{-1} \cdot P$

для элемента k $i := 1..3 \quad \Phi E_{i,k} := \Phi_{MPU_{k,i}}$

касательные напряжения средние по площади элемента

$$\tau E_{xy_k} := \frac{1}{2 \cdot A_k} \cdot (b(k)^T \cdot \Phi E^{(k)}) \quad \tau E_{xz_k} := \frac{-1}{2 \cdot A_k} \cdot (a(k)^T \cdot \Phi E^{(k)})$$

определение касательных напряжений в узлах $k := 1..NE \quad j := 1..3 \quad i := 1..NU \quad \tau_{xy_i} := 0 \quad \tau_{xz_i} := 0$

счетчик элементов, сходящихся в узлах $g_{e1} := 0 \quad g_{eMPU_{k,j}} := g_{eMPU_{k,j}} + 1$

касательные напряжения в узлах $\tau_{xyMPU_{k,j}} := \tau_{xyMPU_{k,j}} + \tau E_{xy_k} \quad \tau_{xzMPU_{k,j}} := \tau_{xzMPU_{k,j}} + \tau E_{xz_k}$

$$\tau_{xy_i} := \frac{\tau_{xy_i}}{g_{e1}} \quad \tau_{xz_i} := \frac{\tau_{xz_i}}{g_{e1}} \quad \tau_i := \sqrt{\tau_{xy_i}^2 + \tau_{xz_i}^2} \quad \tau_{\max} := \max(\tau) \quad \tau_{\max} = 22.7 \cdot \text{МПа} \quad \gamma := \frac{\tau}{\tau_{\max}}$$

крутящий момент $M_k := \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{NE} [A_k \cdot (\Phi E_{1,k} + \Phi E_{2,k} + \Phi E_{3,k})]$

Геометрические характеристики сечения и передача их в программу МКЭ-доп-расчеты

момент инерции $J_k := \frac{M_k}{G \cdot \theta} \quad \text{момент сопротивления} \quad W_k := \frac{M_k}{\tau_{\max}} \quad \text{площадь сечения} \quad AA3 := \sum_{k=1}^{NE} (A_k)$

Рис. 21. Решение уравнения Пуассона



Рис. 22. Результаты расчета и передача их в программу МКЭ-доп-расчеты

На этом работа программы МКЭ-Пуассон закончена, но не закончена работа расчетчика.

Программа решения уравнения Пуассона универсальная и может использоваться для решения других задач. Например, задач термодинамики, электромагнетизма. Алгоритм решения задачи во всех случаях одинаков. Заменить надо лишь матрицу внутренней жесткости и вектор правых частей основного уравнения. Их физический смысл будет совсем другим.

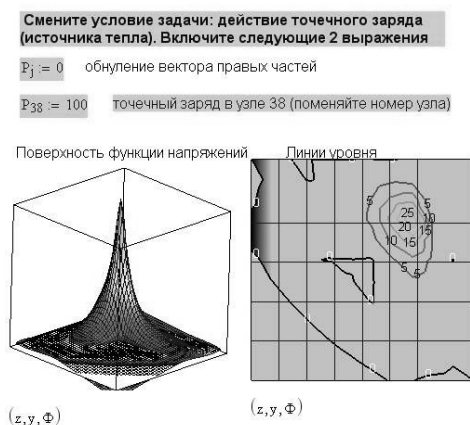


Рис. 23. Решение уравнения Пуассона для точечного источника тепла

В программе МКЭ-Пуассон измените условие задачи (рис. 21). Введите другие граничные условия. Результат пересчёта (рис. 23), эквивалентен распределению температур в пластине, имеющей форму нашего сложного сечения, под действием источника тепла в заданной точке (паяльник или сварка). Поменяйте точку приложения источника тепла.

2.4. Расчет стержневой системы со стержнем сложного сечения

Вернемся к расчету стержневой системы. В начале работы в стержневой системе еще нет стержня со сложным сечением. Идет отладка программы. Сечения всех элементов будут соответствовать матрице BD ввода размеров сечений (рис. 10), то есть круглые или прямоугольные.

Один из стержней заменим стержнем сложного поперечного сечения. Это может быть любой стержень или даже стержень, разбитый на несколько элементов. В программе МКЭ-доп-расчеты на пульте управления (рис. 10) в матрице K введите $K_{n,3} = 3$ для элемента n , форма сечения 3 (сложное сечение). При этом размеры сечения, введенные в матрицу BD , перестают действовать. Передайте действие в программу МКЭ-простран, нажав **CTRL+F9**.

Перейдите в программу МКЭ-простран, нажав сочетание клавиш **CTRL+F6**. Посмотрите на таблицы геометрических характеристик сечений. Для элемента с кодом $K_{n,3} = 3$ моменты инерции сечения (в нашем примере прямоугольного), после пересчета заменяются на моменты инерции сложного сечения.

Теперь нажмите **CTRL+F9** для пересчета основной программы. Снова вернитесь в программу МКЭ-доп-расчеты и пересчитайте ее тоже. В конце этой программы в скрытой зоне производится расчет эквивалентных напряжений во всех узлах сложного сечения и выбирается максимальное эквивалентное

напряжение. Результат пересчета отражается на пульте управления (рис.24).

21 СОВЕТ

Переходя от одной программы к другой (**CTRL+F6**), введя какие-то изменения в исходные данные, не забывайте нажимать **CTRL+F9** для пересчета программы.

Программа МКЭ-доп-расчеты предусматривает и возможность изменения размеров сложного сечения. В нее введен масштабный коэффициент **a** в конце программы. Если максимальное эквивалентное напряжение в этом элементе мало или велико, измените коэффициент **a**, сделав его больше или меньше единицы. Пропорционально коэффициенту **a** изменятся размеры сложного сечения. Последовательно пересчитав все три программы, нажимая в них **CTRL+F9**, найдите максимальные напряжения в стержне с измененными размерами на пульте управления (рис.10) и в конце расчёта (рис. 24, внизу).

Силы и перемещения в узле i по направлению j

	1	2	3	4	5	6
1	0	-108	0	7	0	-11
2	0	0	0	20	0	0
3	0	-108	0	0	0	11
4	0	-200	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	60	-80	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	-25
9	0	-108	0	-7	0	11

FF1 =

угловые перемещения (4,5,6) переведены в градусы,
линейные перемещения (1,2,3) в мм

	1	2	3	4	5	6
1	0	-0	0	0	0	-0
2	0.03	-0	-0	2.33	0	-0
3	0.03	-0.85	0	0.61	-0	0.14
4	0.03	-0.04	0	0.04	-0	0.29
5	0	0	0	-0	0	0
6	0	-0	-0	0.02	0.03	-0.47
7	1.05	-1.4	-0.05	0.02	0.03	-0.26
8	-0	-0	-0	-0	-0	-0.88
9	-0	-0.85	0	-0.82	-0	0.14

ΔΔ1 =

·мм

Анализ результатов расчета элемента сложного сечения

в начале элемента $x_a = 1$ в конце элемента $x_a = 2$

включите это выражение

В элементе со сложным сечением $k_{\text{слож}} = 5$ максимальное эквивалентное напряжение

$\max \sigma_{\text{эслож}} = 69 \text{ МПа}$ действует в узле $N_{\text{узла}} = 209$ с координатами $y_{N_{\text{узла}}} = 34.2 \text{ мм}$ $z_{N_{\text{узла}}} = 0 \text{ мм}$

максимальное касательное напряжение действует в узле $N_{\text{узлат}} = 12$ с координатами $y_{N_{\text{узлат}}} = 1.8 \text{ мм}$ $z_{N_{\text{узлат}}} = 13.2 \text{ мм}$

Для изменения размеров сложного сечения
поменяйте масштабный коэффициент **a**

$a = 0.9$

размеры сложного сечения после пересчета

$R = 27 \text{ мм}$ $a1 = 18 \text{ мм}$ $a2 = 13.5 \text{ мм}$ $a3 = 9 \text{ мм}$

Для разворота сложного сечения на 90 градусов поменяйте на $KR=1$ $KR = 0$

Рис. 24. Пересчет напряжений в стержне сложного сечения с изменением его размеров

Для контроля за правильностью расчетов, точнее говоря, за соответствием расчетов здравому смыслу, в конце программы МКЭ-доп-расчеты выведены таблицы узловых значений нагрузок (введенных) и перемещений (расчетных) (рис. 24).

Компьютерный расчет закончен. Но еще остается часть ручной работы расчетчика.

2.5. Построение эпюр внутренних усилий с учетом распределенной нагрузки

Для выбора опасного сечения в сопротивлении материалов строят эпюры внутренних усилий. Может ли Mathcad построить эти эпюры? Конечно, может. По условиям метода конечных элементов все нагрузки прикладываются в узлах системы и соответственно внутренние усилия определяются тоже в узлах. Таким образом, в результате расчета методом конечных элементов известны внутренние усилия на границах элементов-стержней. Если нет распределенной нагрузки, все графики внутренних усилий представляют собой прямые линии. Значения усилий на границах Mathcad соединяет прямой линией. Эпюры готовы? Не совсем.

В МКЭ, если знаки внутренних усилий на концах элемента одинаковы, то и направления усилий одинаковы. В сопротивлении материалов, если знаки внутренних усилий на концах элемента одинаковы, то направления усилий противоположны.



Рис. 25. Построение эпюр внутренних усилий в Mathcad

Для построения эпюр внутренних усилий в программе МКЭ-доп-расчеты знак внутренних усилий в начале элемента пришлось изменить на противоположный. На рисунке 25, слева показаны только три момента (M_k, M_y, M_z). Три силы (N_x, Q_y, Q_z) не показаны, чтобы не загромождать рисунок, к тому же они не используются в расчетах.

Если на элемент действует распределенная нагрузка, то построение эпюр внутренних усилий становится значительно более сложным. Чтобы понять процесс учета распределенной нагрузки, предлагается построить эпюры вручную.

В качестве примера рассмотрим построение эпюр внутренних усилий в элементе 1.

Вначале изобразим элемент с 12-ю степенями свободы и по каждому направлению впишем величину внутреннего усилия (рис. 26, слева). Для отрицательных величин меняем направление стрелки. В итоге имеем стержень, нагруженный 12-ю нагрузками, для которого надо построить эпюры внутренних усилий.

Эпюры N_x, Q_y, Q_z, M_k имеют вид прямоугольников. Эпюры изгибающих моментов M_y, M_z строим по двум точкам, отложив значения моментов на границах участков и соединив их прямой линией. При построении эпюр изгибающих моментов используют правило знаков, принятое в сопротивлении материалов. Эпюры изгибающих моментов строят на сжатых волокнах. Эпюры внутренних усилий без учета распределенной нагрузки построены.

Для учета распределенной нагрузки надо из внутренних усилий вычесть приложенные перед началом расчета эквивалентные нагрузки и вернуть на элемент распределенную нагрузку. Построение эпюр Q_y и M_z с учетом распределенной нагрузки показано на рис. 26, справа. Запишем уравнения поперечной силы и изгибающего момента:

$$Q_y(x) = 75,1 - q_y x \quad M_z(x) = -9,9 + 75,1x - q_y \frac{x^2}{2}.$$

Приравняв нулю поперечную силу, находим координату сечения, где действует максимальный изгибающий момент.

$$x_0 = 0,375 \text{ м} \quad \max M_z(x_0) = 4,2 \text{ нм}.$$

По уравнениям $Q_y(x)$ и $M_z(x)$ строим две эпюры (рис. 26, справа). Остальные эпюры внутренних усилий остаются без изменений.

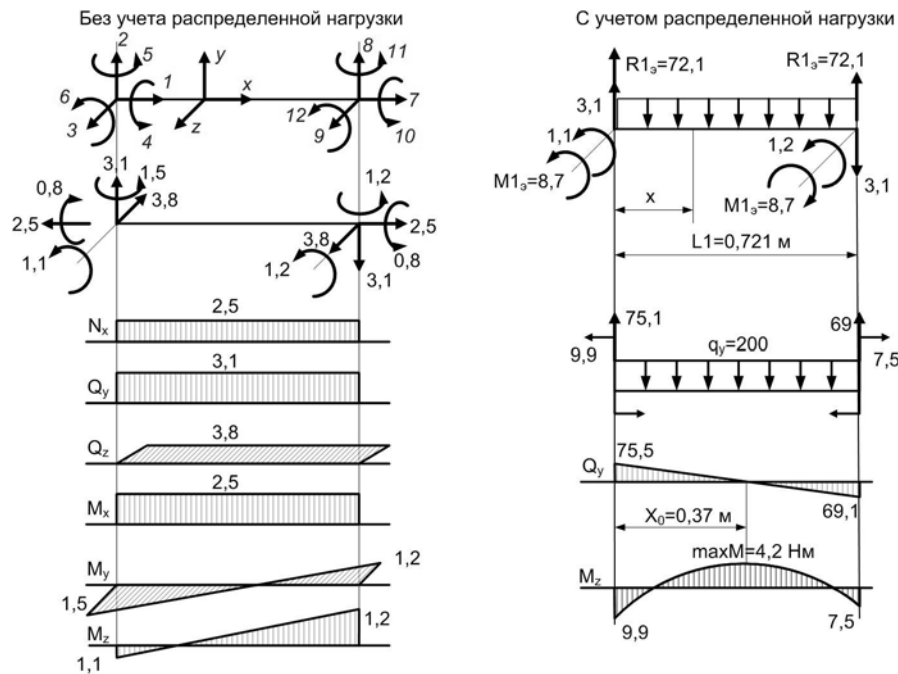


Рис. 26. Построение эпюр внутренних усилий с учетом распределенной нагрузки

Опасное сечение в нашем примере на левом конце стержня. Однако чаще всего максимальный изгибающий момент действует в сечении, где этот момент имеет экстремум. Mathcad может сам посчитать напряжения и в этом сечении, но для закрепления знаний сопротивления материалов студент-расчетчик должен самостоятельно (вручную) сосчитать максимальные эквивалентные напряжения в этом сечении.

Это единственная возможность заставить студента раскрыть закрытые зоны программы, поискать там нужные расчетные данные и формулы (в подпрограммах расчета напряжений). Вспомнить условие прочности при сложном напряженном состоянии.

Результаты расчета вывести в виде сводной таблицы (таблица 1)

Таблица 1.

Номер элемента	Размеры сечения (мм)					Материал	$[\sigma]$	$\max \sigma_{эквIV}$	$\max U$
	b	h	δ	D	d		МПа	МПа	мм
1	Сложное сечение $a = 0,6$					Латунь	50	43	1,8
2				15	0	Сталь	100	82	0,9
3				15	0	Сталь	100	84	1,2
4	20	20				алюминий	50	38	1,1
5	20	20				Алюминий	50	11	4,5
6				12	8	текстолит	40	1	0,04
7	Уголок 30 х 30 х 3					Сталь	100	51	0,8

Размеры сложного сечения после расчета (масштабный коэффициент $a = 0,6$)

$R = 12$ мм, $a_1 = 7,2$ мм, $a_2 = 4,8$ мм, $a_3 = 3,6$ мм.

Масса конструкции 3,62 кг.

Собственные частоты колебаний конструкции в герц;

$$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4 \quad \omega_5$$

Сосредоточенной массы нет 50 69 112 127 139

Сосредоточенная масса $m_0 = 10$ кг 28 52 68 82 137

ПРИМЕЧАНИЕ

Далее уместно записать любые (разумные) фантазии по поводу использования конструкции, например:

ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Рассчитываемая конструкция предназначена для размещения на ней технологического оборудования и является частью большой конструкции, нагрузки от которой передаются на расчетный узел. Оборудование размещается на верхней горизонтальной поверхности

Элемент 1 может находиться под электрическим напряжением, поэтому выполнен из латуни. Рекомендуется уменьшить нагрузку на этот стержень.

Элементы 2 и 3 представляют собой единую ось, по которой скользит втулка. Это единая деталь, выполненная в виде стального круглого стержня.

Элементы 4 и 5 также единая деталь. Нагрузка на них недопустимо велика, поэтому не удалось удовлетворить условию жесткости $\delta < 2$ мм. Необходимо ввести в конструкцию дополнительный стержень – подпорку.

Элементы 6 и 7 — малонагруженные конструктивные опоры, Элемент 6 выполнен в виде алюминиевой трубки, элемент 7 — равнобокий уголок. Размеры их взяты из технологических соображений.

3. Содержание отчета о курсовой работе

1. Титульный лист.
2. Распечатка файла «порядок расчета.doc».
3. Исходные данные для расчета (схема стержневой системы и сложного сечения, числовые данные к расчету) (рис. 2).
4. Распечатка программы МКЭ-доп-расчеты с расчетом системы после подбора размеров сечений из условий прочности и жесткости.
5. Распечатка программы МКЭ-Простран.
6. Распечатка программы МКЭ-Пуассон с результатами расчета на кручение.

ВНИМАНИЕ

Перед распечаткой в Mathcad-программах закройте все «закрытые» зоны, тогда в распечатках останутся только исходные данные, алгоритм решения (основные формулы) и результаты расчетов.

7. Лист с построением эпюр внутренних усилий для стержня с распределенной нагрузкой.
8. Таблица с результатами расчета системы.
9. Выводы: Примечания к расчету, рекомендации по использованию конструкции и возможности ее улучшения.

ВНИМАНИЕ

Во всех программах перед распечаткой введите в колонтитулы свои фамилию, номер группы и вариант расчета. Для этого в стандартном меню Mathcad выберите View ► Header and Footer ► Footer (Вид ► Колонтитулы ► Нижний колонтитул). Впишите свои данные: фамилию, группу и вариант.

4. Типичные ошибки при выполнении курсовой работы

ГЛАВНОЕ В ПОИСКЕ ОШИБОК

Найдите операторы, выделенные красным цветом, указывающим на источник ошибки.

Почти все ошибки вызываются **неверными исходными данными**. Тщательно проверьте ввод всех исходных данных. А также проверьте включение-выключение необходимых операторов в соответствии с указаниями программы МКЭ-доп-расчеты.

Возможно при введении исходных данных сдвиг какого-то оператора нарушил последовательность операций. В Mathcad вычисления идут по строкам слева - направо сверху - вниз.

При считывании данных из файла Mathcad не может найти файл. — Mathcad-программы и файлы, созданные ею, должны находиться в **одной директории**. Запустите на счёт каждую из трёх программ два-три раза для обмена данными между программами.

В программе «Простран» при расчете вынужденных колебаний коэффициент динамичности меньше единицы. — Сосредоточенную массу поставьте в узел, где ожидаются большие перемещения. Амплитуда вынуждающей силы мала по сравнению с другими, постоянно приложенными нагрузками, поэтому ее влияние мало. Поменяйте номер перемещения nm . Уменьшите в матрице затухания $[H]$ коэффициент β_1 .

В программе «Пуассон» не строится вид сложного сечения.

- При вводе координат контура сечения компоненты векторов Z_1 и Z_2 должны располагаться в возрастающем порядке. В случае совпадения координаты Z в двух точках сделайте малый сдвиг на 0,001 мм.

Ошибки Mathcad (редко, но бывают). При многократной перезаписи программ возможно появление ошибок Mathcad. Иногда для исправления ошибки достаточно отпечатать заново оператор, в котором указана ошибка. Если описанные средства исправления ошибок не помогают, скопируйте введенные исходные данные в программы, взятые непосредственно с сайта автора.

5. Вопросы к защите курсовой работы

1. Основная идея МКЭ
2. Основное уравнение МКЭ и уравнение связи перемещений.
3. Физический смысл коэффициента жесткости и функции формы
4. Разбиение стержневой системы на конечные элементы.
5. Матрица направляющих косинусов и её роль в расчёте.
6. Матрица индексов, её назначение, составление.
7. Формирование вектора сил.
8. Учет закреплений системы способом Пиано.
9. Порядок расчета методом конечных элементов стержневой системы,
10. Подбор размеров сечений стержней из условий прочности и жесткости.
11. Уравнение движения систем с одной степенью свободы и с большим числом степеней свободы.
12. Определение собственных частот стержневых систем.
13. Основная идея расчета системы на вынужденные колебания.
14. Для чего нужна в курсовой работе программа МКЭ-Пуассон.

6. Статический расчёт стержневой системы

Поскольку в этой работе студенты впервые знакомятся с вычислительным комплексом ANSYS, упростим расчётную схему стержневой системы. Пусть все стержни сделаны из одного материала и имеют одинаковые поперечные сечения. Кроме того, убираем ползун, обеспечивая жёсткое соединение всех стержней. Такая схема ближе к реальности и проще расчёт.

До начала работы в ANSYS надо тщательно подготовить все исходные данные для ввода. Исправление уже введенных данных возможно, и вам придется его делать. Но желательно при отсутствии опыта работы с ANSYS реже прибегать к процедуре исправления ошибок.

6.1. Подготовка данных на листе бумаги

Для заданного варианта курсовой работы надо

1. Нарисовать в масштабе схему стержневой системы (рис. 27). На схеме указать номера узлов (*keypoints*), номера стержней (*lines*).

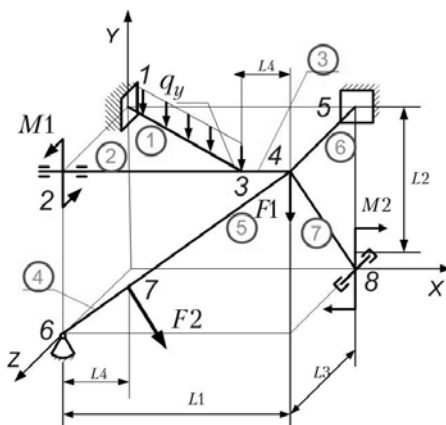


Рис. 27. Расчетная схема стержневой системы (в кружке линии, без кружка точки)

2. Выписать координаты всех точек (начала и конца всех стержней (таблица 1).

Таблица 1. Координаты точек (*keypoints*) концов линий (*lines*) (в метрах)

Номер точки	X	Y	Z
1	0	0.6	0
2	0	0.6	0.4
3	0.6	0.6	0.4
4	0.8	0.6	0.4
5	0.8	0.6	0
6	0	0	0.4
7	0.2	0.15	0.4
8	0.8	0	0

3. Для построения линий модели введите точки начала и конца каждой линии.

Таблица 2. Точки начала и конца линий

Номер линии	начало	конец
1	1	3
2	2	3

3	3	4
4	4	5
5	4	8
6	6	7
7	7	4

4. Выбрать материал стержней, форму и размеры поперечного сечения всех стержней.

Например, материал сталь, $E = 2e11$. $\mu = 0.3$.

Сечение кольцевое $D = 0.01$, $d = 0.006$.

5. Выписать список граничных условий в перемещениях и в нагрузках, то есть указать закрепления стержневой системы и приложенные к ней нагрузки (таблица 3).

Таблица 3. Условия закрепления системы и нагрузки, приложенные к ней

Точка	Закрепление	нагрузка	Примечание
1	All DOF = 0		заделка
2	$U_y = U_z = ROT_y =$ $= ROT_z = 0$	$M(x) = 20$ нм	Плавающий подшипник
3			Общая точка 3-х стержней
4		$F_y = -200$ н	Общая точка 4-х стержней
5	All DOF = 0		заделка
6	$U_x = U_y = U_z = 0$		Сферический шарнир
7		$F_x = 180$ н $F_y = -240$ н	
8	$U_x = U_y = U_z = ROT_x =$ $= ROT_y = 0$	$M(z) = -25$ нм	Подшипник фиксированный

ПРИМЕЧАНИЕ

All DOF = 0 — все перемещения равны нулю (заделка), U — линейное перемещение, ROT — угол поворота (вращение).

Результаты желательно согласовать с преподавателем. Далее приступайте к работе в ANSYS.

6.2. Создание модели стержневой системы

В стандартном меню (ANSYS Multiphysics Utility Menu — самая верхняя строка в рабочем окне) в меню File выбрать

- ☐ **Clear and start new**,
- ☐ **Change Jobname**, любое имя, а лучше оставить старое **file**.
- ☐ **Change Directory**. Директория должна быть уже создана. В этот каталог ANSYS будет записывать файлы результатов расчёта.

ВНИМАНИЕ

ANSYS не понимает кириллицу. Весь путь к нужной папке (все названия файлов и каталогов) обязательно должны быть указан латинскими буквами или цифрами.

- 29□ В главном меню ANSYS (ANSYS Main Menu — колонка команд в рабочем окне слева) определить тип расчета (прочностной). Для этого выбрать **Preferance ▶ Structural**.

Далее создаем модель пространственной стержневой системы.

В главном меню ANSYS выбрать **Preprocessor ▶ Modeling**. Далее

- Ввести координаты точек (keypoints) стержневой системы

Create Keypoints ▶ In Active CS. В диалоговом окне ввести номер точки и его координаты (в метрах). После ввода каждого узла выбрать кнопку **Apply**. Введя все точки, нажмите **OK**.

- Создать линии, соединяющие точки.

Create ▶ Lines ▶ Lines ▶ Straight Line — в диалоговом окне ввести через запятую номера точек начала и конца каждого стержня. После ввода каждой линии выбрать кнопку **Apply**. Введя все линии, нажмите **OK**.

- В случае ошибки ввода данных выполните следующие команды:

Modeling ▶ Delete ▶ либо **Keypoint** (для удаления точки) — указать неверную точку, либо **Line Only** — указать неверную линию.

ВНИМАНИЕ

В процессе ввода данных наблюдайте в окне ANSYS появление точек и линий или их исчезновение при удалении.

Не забывайте после выполнения каждого пункта сохранить результаты работы, нажав кнопку **SAVE_DB** в ANSYS Toolbar (слева сверху экрана)

- Для просмотра результатов ввода полезно в стандартном меню (верхняя строка окна) выбрать **PlotCtrls ▶ Numbering**. Отметьте флажком **Keypoint Numbers** и **Lines Numbers**. В стандартном меню укажите график для просмотра **Plot ▶ MultiPlots** (все сразу).

6.3. Создание сетки конечных элементов

Выбор материала

В главном меню ANSYS выберите

Preprocessor ▶ Material Props ▶ Material Model. В открывшемся окне выберите (двойным щелчком мыши)

Structurel ▶ Linear ▶ Elastic ▶ Isotropic. Откроется новое окно, в котором введите величины модуля Юнга (**EX**) и коэффициента Пуассона (**PRXY**). Нажав **OK**, вы вернетесь в предыдущее окно, где надо ввести еще плотность материала **Density** для последующих динамических расчетов. Для стали надо ввести $EX = 2E11$, $PRXY = 0.3$, $dens = 7800$.

Выбор типа конечных элементов

Выберите тип конечного элемента, который будет использоваться для всех стержней. Последовательно выберите

Preprocessor ▶ Element Type ▶ Add/Edit/Delete ▶ Add. Откроется библиотека конечных элементов, в которой выбираем для стержней-балок квадратичный конечный элемент **BEAM ▶ 2 Node 188**. Тем самым выбран элемент **BEAM188**. Не закрывая окно, **Element Types** нажмите **Options**. В новом появившемся окне в пункте **Element Behavior** выберите **Quadratic Form** (квадратичный элемент вместо линейного).

Выбор поперечного сечения стержней

В главном меню ANSYS выберите

Preprocessor ▶ Section ▶ Beam ▶ Common Sections. Откроется окно выбора типовых сечений. Щелкните **SubType**. В выпадающем меню выберите нужный тип сечения (кольцевое). Введите его размеры (в метрах) $R_i = 0.006$ $R_e = 0.01$. Далее нажмите **Preview**, затем **Mechview**. Посмотрите на вид введенного сечения и разбивку сечения на конечные элементы. Нажмите **OK**. Для возврата к виду стержневой системы в главном меню выберите **Plots ▶ Multi-Plots**.

Выбор числа элементов по длине стержня

Далее надо выбрать число (размер) элементов на каждой линии. Откройте в главном меню ANSYS

Preprocessor ▶ Meshing ▶ Size Cntrs. Можно доверить ANSYS выбор размеров элементов, выбрав далее

Smart Size ► **Basic**. В открывшемся окне оставьте **Off**. Элементов в каждом стержне будет мало, и они будут крупными. В данном расчете это нас почти устраивает, за исключением стержня с распределенной нагрузкой. Зададим количество элементов вручную. После пункта **Size Ctrl**s выберите **Manual Size** ► **Picked Lines**. Выделите мышью стержень, который будет нагружен распределенной нагрузкой, там изгибающий момент изменяется по параболе. Нажмите **Apply**. Введите число элементов **No. Of Element Division = 5**.

Построение сетки конечных элементов

Выберите **Preprocessor** ► **Meshing** ► **Mesh** ► **Lines** ► **Picked Line** ► **Pick all** ► **OK**. Сетка создана, но на экране ее не видно. В стандартном меню (вверху экрана) выбрать **Plots Ctrl**s ► **Style** ► **Size and Shape**. В появившемся окне отметьте флажком **Display of Element** ► **ON**. Укажите масштабный коэффициент **Real constant multiplier** ► **1**. В стандартном меню (вверху экрана) выбрать **Plots** ► **Multi-Plots**. На экране появится вполне правдоподобная стержневая система.

6.4. Решение задачи

Ввод нагрузок, закреплений системы и решение задачи осуществляется из главного меню ANSYS из раздела **Solution**.

Ввод закреплений и нагрузок

Введем закрепления стержневой системы.

Solution ► **Define Loads** ► **Apply** ► **Structural** ► **Displacement** ► **On Keypoints**.

Появляется окно, где надо указать мышью или ввести номера точек, где наложены ограничения на перемещения (Таблица 3). Вводим номер точки (или выделяем точку указателем мыши) и нажимаем **Apply**. Если есть несколько точек с одинаковыми закреплениями, то номера таких точек вводим через запятую. В случае жесткой заделки в появившемся окне выбрать **All DOF** ► **Apply**. (все перемещения в узле по умолчанию равны нулю).

В случае других закреплений, в частности, шарниров надо ввести ограничения по каждому отдельному направлению перемещения. По умолчанию перемещение по указанному направлению равно нулю. Если нет, то надо ввести величину перемещения.

Для ввода нагрузок выбрать почти тот же путь

Solution ► **Define Loads** ► **Apply** ► **Structural** ► **Force/Moment** ► **On Keypoints**. В появившемся окне ввести номер точки, где надо задать силу или момент сил. Нажать **Apply**. Появится новое окно, где надо указать направление силы или момента сил и ввести величину этой нагрузки (в системе СИ). Вновь нажать **Apply**. Повторить процедуру для всех заданных нагрузок, кроме распределенной нагрузки.

Для ввода распределенной нагрузки (давления) выбрать

Solution ► **Define Loads** ► **Apply** ► **Structural** ► **Pressure** ► **On Beams**. Мышью указать все элементы стержня, к которым надо приложить распределенную нагрузку. В ANSYS распределенная нагрузка прикладывается не к стержню, а к элементу, чтобы далее заменить ее эквивалентной узловой нагрузкой. Отметив все нужные элементы, нажмите **OK**. Ввести **Load Key** — направление нагрузки (1 — вдоль оси Z, 2 — вдоль оси Y, другое поперечное направление, 3 — X, вдоль оси стержня). Ввести величину распределенной нагрузки в одном из узлов, если $q = Const$, или в начале и в конце стержня, если нагрузка переменная. Для нашего примера ввести направление 2, давление 1000 (ньютон на метр).

Подготовка к расчету закончена. Заключительное действие — решение задачи. Выбрать

Solution ► **Solve** ► **Current LS**. Появляется окно **Solution is done**. Задача решена.

6.5. Просмотр результатов расчета

Результаты расчета можно посмотреть, используя главное меню ANSYS раздел **General Postprocessor**. Для стержневой системы можно посмотреть вид системы после деформации и распределение напряжений (рис. 28).

Выберите **General Postprocessor** ► **Plot Results** ► **Contour Plot** ► **Nodal Solu** ► **Stress** ► **von Mises stress**. В появившемся окне отметьте флажком **Def+undeformed** ► **OK**. В верхнем левом углу ANSYS выводит максимальное перемещение DMX (в м), минимальное напряжение SMN и максимальное напряжение SMX (в Па) в конструкции.

Чтобы сохранить картинку из окна ANSYS, в главном меню ANSYS выберите **PlotCtrls** ► **Hard Copy** ► **To File**. В появившемся окне нажмите **OK**. Рисунок в формате bmp или jpg будет сохранен в рабочем каталоге, указанном в начале работы с ANSYS.

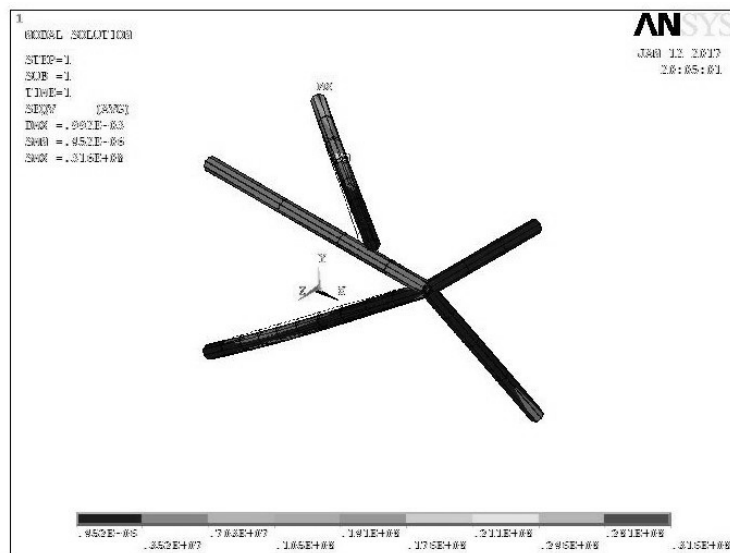


Рис. 28. Вид системы до и после деформации и напряжения в конструкции

Можно посмотреть напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержней в начале и в конце каждого элемента (рис. 29).

PRSSOL Command			
File			
72	0.11302E+08	0.36779E+06	0.71653E+07
76	0.12031E+08	-0.17845E+07	33956.
77	0.11302E+08	0.52350E+06	-0.71226E+07
82	0.10194E+08	0.53065E+06	0.75724E+07
86	0.19620E+08	-0.15227E+07	0.14139E+07
87	0.19620E+08	-0.76150E+07	-19164.
92	0.19621E+08	-0.19080E+07	-0.12860E+07
96	0.19620E+08	-0.74405E+07	0.17516E+06
97	0.19620E+08	-0.14729E+07	-0.14184E+07
102	0.19621E+08	-0.19521E+07	0.12643E+07
Max=	0.19621E+08	0.76651E+07	0.82311E+07
Min=	-0.13468E+08	-0.76150E+07	-0.80865E+07
STRESSES AT BEAM SECTION NODAL POINTS			
ELEMENT = 2 SECTION ID = 1			
ELEMENT NODE = 1			
SEC NODE	SXX	SXZ	SXY
1	-0.71860E+07	0.99184E+06	58984.
2	-0.26803E+07	-0.38035E+07	-0.16594E+06
3	-0.23432E+07	-0.40233E+07	915.84

Рис. 29. Напряжения в сечениях стержней на границах элементов

Для этого выберите **General Postprocessor** ► **List Results** ► **Element Solution** ► **Stress**. Открывается окно, где показаны напряжения в узлах элементов. В расчете использовано два типа элементов. Балочный элемент (разбивка каждой линии по длине) и каждое сечение разбито на конечные элементы. Для каждого балочного (двухузлового) элемента выводятся напряжения в двух сечениях (в начале и в конце элемента **Element Node** = 1 или 2). В каждом сечении выведены напряжения в узлах разбивки сечения **Sec Node**). В таблице обозначены **SXX** — нормальное напряжение σ_x , **SXZ** и **SXY** — касательные напряжения τ_{xz} и τ_{xy} вдоль осей **Z** и **Y**. Для каждого узла каждого балочного элемента выводятся максимальные и минимальные напряжения.

Сохраните эту таблицу. Слева вверху (рис. 29) в единственном пункте меню **Файл** выберите **сохранить как**, укажите место сохранения файла и его расширение (txt или doc).

7. Динамический расчет стержневой системы

При проведении динамического расчета модель стержневой системы и сетка конечных элементов на ней остаются прежними. Если динамический расчет проводится после повторного открытия ANSYS, необходимо повторить вход в программу

1. В стандартном меню **File** выбрать
2. **Clear and start new**,
3. **Change Jobname**. Желательно изменить имя **Jobname**, например, **1file**.
4. **Change Directory**. Указать директорию, в которой начат расчёт.

Для открытия файла в стандартном меню **File** выбрать **File** ► **Resume from** ► указать путь к db-файлу из

каталога со статическим расчетом.

32 Для проверки сохранности данных в главном меню ANSYS выберите **Lists ► Loads**. Если нагрузки и условия закрепления не сохранились, введите их снова.

ПРИМЕЧАНИЕ

Внешние нагрузки не используются при расчёте собственных частот конструкции.

7.1. Ввод сосредоточенной массы

В одном из узлов системы, точнее в точке (*keypoint*) введем точечный элемент, обладающий массой. Выберите тип элемента.

Preprocessor ► Element Type ► Add/Edit/Delete. В появившемся окне нажмите **Add**, в библиотеке элементов выберите **Structural Mass — 3D Mass21**. Теперь надо указать массу этого элемента. Выберите

Preprocessor ► Real Constants ► Add/Edit/Delete ► Mass21 ► OK. В появившемся окне по направлениям *X*, *Y*, *Z* укажите одну и ту же массу, например, 10 кг. Нажмите **OK**. Моменты инерции массы задавать не надо.

Создадим конечный элемент на основе сосредоточенной массы. Вначале введем атрибуты элемента

Preprocessor ► Meshing ► Mesh Attributes ► Picked KPs. Ввести номер точки, где приложена сосредоточенная масса и нажать **OK**. В появившемся окне указать тип конечного элемента **Mass21**.

Введем новый элемент в сетку конечных элементов

Preprocessor ► Meshing ► Mesh ► Keypoints. Ввести номер точки, где прикладывается сосредоточенная масса. Сетка конечных элементов подправлена с учетом сосредоточенной массы.

7.2. Расчет собственных частот

Выбираем вначале вид расчета.

Solution ► Analysis Type ► New Analysis ► Modal. Затем выбираем метод решения.

Solution ► Analysis Type ► Analysis Options. В появившемся окне (рис. 30) отметить метод решения **Block Lanczos**.

- в поле **No. of modes to extract** (количество вычисляемых собственных частот) ввести количество определяемых собственных частот и форм (по желанию пользователя, в данном случае 8);
- в поле **Expand mode shapes** (вычислять формы колебаний) установить переключатель в положение *Yes*, что позволит получить не только значение частоты и перемещения узлов конструкции, но и возникающее в ней напряженно-деформированное состояние;
- в поле **No. of modes to expand** (количество собственных частот, для которых следует вычислять напряженно-деформированное состояние) следует указать 8, как и в поле **No. of modes to extract**;
- в поле **Calculate elem results?** (вычислять результаты в конечных элементах?) установить переключатель в положение *Yes*.

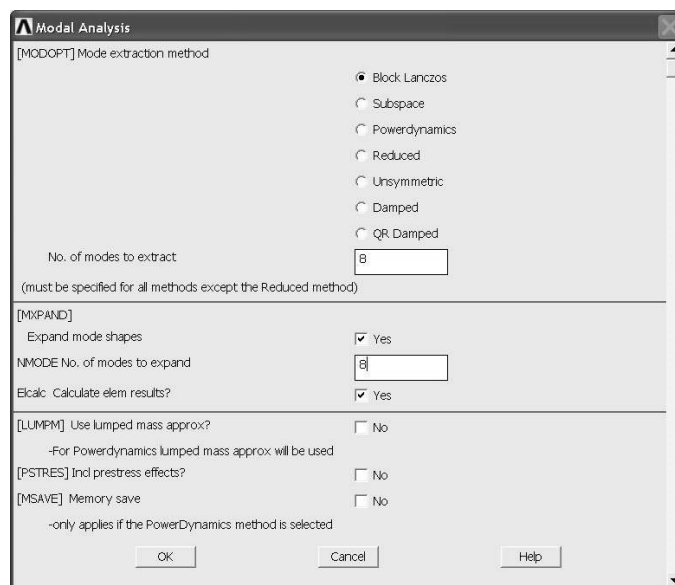


Рис. 30. Выбор метода динамического расчета

После этого нужно нажать кнопку **OK** и появится новая панель **Block Lanczos Method**. В этой панели следует ввести следующие данные:

- 33
- в поле **Start Freq (initial shift)** (наименьшая частота) указать начальное значение диапазона частот, в котором будет производиться поиск собственных частот (можно указать 0);
 - в поле **End Frequency** (наибольшая частота) указать конечное значение диапазона частот; например, 1000.

Далее решение задачи. Выбрать **Solution ► Solve ► Current LS**. В всплывающем окне должны увидеть *Solution is done*. Решение найдено. Приступаем к просмотру результатов расчета.

7.3. Просмотр результатов расчета

Выбираем **General Postproc ► Read Results ► By Pick**. В окне появится список (вектор) собственных частот (рис. 31). Больше ничего полезного этот расчет не дает. Зато дает хорошую игрушку — анимацию формы колебаний.

Results File: file.rst				
Available Data Sets:				
Set	Frequency	Load Step	Substep	Cumulative
1	3.9712	1	1	1
2	21.857	1	2	2
3	32.971	1	3	3
4	65.748	1	4	4
5	70.309	1	5	5
6	76.585	1	6	6
7	110.57	1	7	7
8	141.86	1	8	8

Рис. 31. Список собственных частот стержневой системы

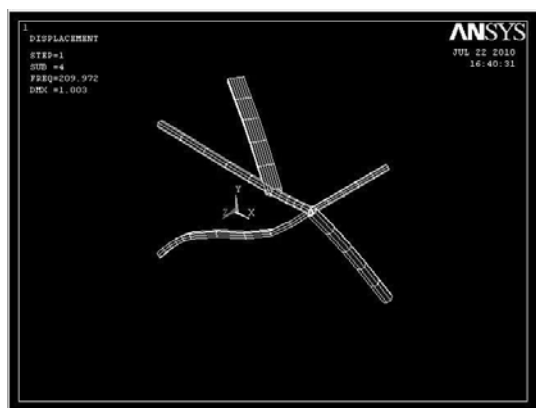


Рис. 32. Форма колебаний системы на пятой собственной частоте

Выберите первую частоту, нажмите **Read**, затем **Close**. В стандартном меню в разделе **PlotCtrls** выберите **Animate ► Mode Shape**. В появившемся окне ничего не меняйте. Нажмите **OK**. Посмотрите на колебания системы на первой собственной частоте. С помощью движка увеличьте скорость колебаний. Так больше похоже на правду. Далее выберите вторую и все последующие частоты колебаний. Полюбуйтесь формой колебаний на разных частотах (рис. 32).

Глядя на форму колебаний (рис.32), имейте ввиду, что собственные вектора нормируются и максимальная амплитуда колебаний на всех частотах одинакова. В реальности амплитуда колебаний резко убывает с ростом номера частоты. На пятой частоте (рис.32) амплитуда колебаний меньше 0,01 мм.

Чтобы сохранить все результаты расчета, как всегда нажмите **SAVE_DB**, кроме того можно создать lgw-файл. Для этого, выберите в стандартном меню **File ► Write DB Log file** ► введите имя сохраняемого файла. Такой файл практически аналогичен db-файлу, кроме того, сохраняет результаты расчета, и позволяет открыть расчет в любой версии ANSYS.

8. Содержание отчета о курсовой работе в ANSYS

1. Постановка задачи курсовой работы и исходные данные к расчету.
2. Подготовка данных для расчета в ANSYS (рис. 27, таблицы 1.2.3).
3. Результаты расчета в ANSYS статической и динамической задачи.
 - Напряжения и вид стержневой системы до и после деформации (рис. 28).
 - Таблица максимальных напряжений в стержнях. Она огромная. Распечатайте лишь одну страницу (рис. 29).
 - Результаты динамического расчета. Список собственных частот стержневой системы (рис. 31). Форма колебаний на одной из собственных частот (рис.32).

Варианты заданий для расчета

34

Таблица К.1 Стержневые системы

<p>Вариант 1</p>	<p>Вариант 2</p>
<p>Вариант 3</p>	<p>Вариант 4</p>
<p>Вариант 5</p>	<p>Вариант 6</p>
<p>Вариант 7</p>	<p>Вариант 8</p>
<p>Вариант 9</p>	<p>Вариант 10</p>

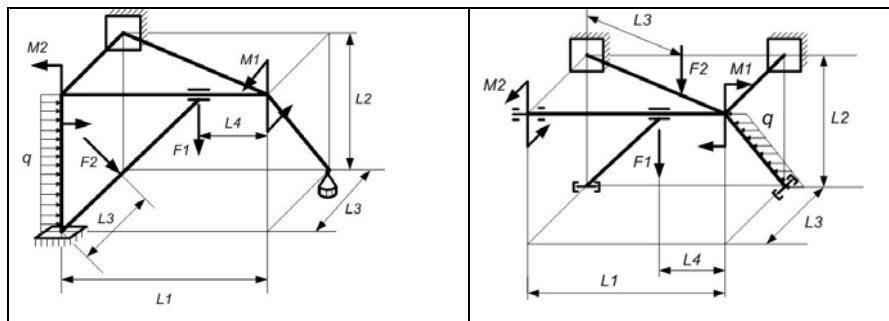
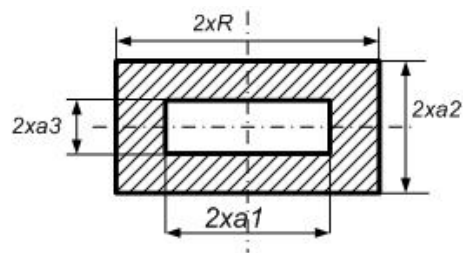


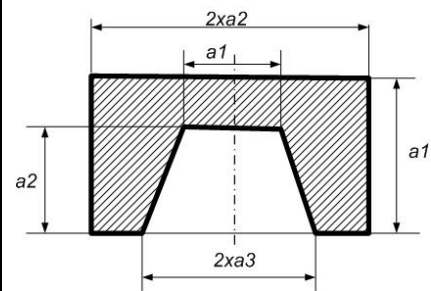
Таблица К.2 Сложные сечения для расчета стержневых систем

<p>Вариант 1</p>	<p>Вариант 2</p>
<p>Вариант 3</p>	<p>Вариант 4</p>
<p>Вариант 5</p>	<p>Вариант 6</p>

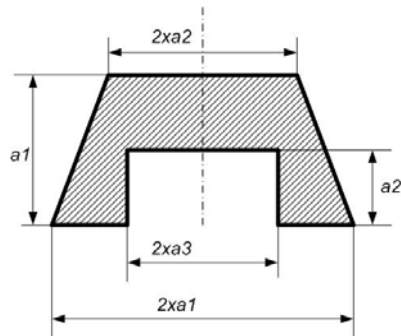
Вариант 7



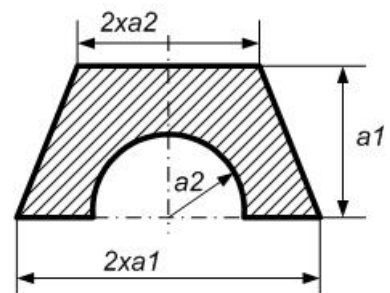
Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10



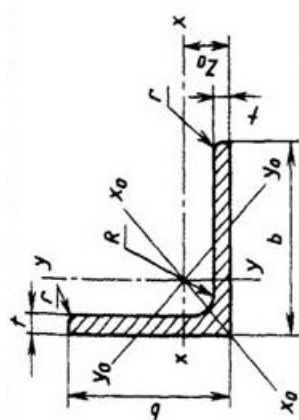
Исходные данные к расчету

Таблица К.3 Для стержневой системы:

Вариант	L1	L2	L3	L4	M1	M2	F1	F2	q	№ уголка
	см				Нм		Н		Н/м	
А	100	60	40	30	35	20	400	150	400	3,5 t = 3
Б	80	60	30	20	20	30	300	100	400	3,5 t = 4
В	60	50	40	20	30	40	400	200	500	3,5 t = 5
Г	50	40	30	15	25	35	400	200	500	4 t = 3
Д	90	70	50	30	30	25	300	200	400	4 t = 4
Е	70	50	40	20	35	10	400	200	400	4 t = 5
Ж	60	50	40	25	40	15	200	200	400	4,5 t = 3
З	100	70	50	20	25	20	350	150	500	4,5 t = 5
И	80	50	40	15	30	25	350	200	300	5 t = 3
К	60	50	40	20	20	35	300	100	300	5 t = 5

Таблица К.4 Для сложного сечения стержня:

37 Вариант	R	a1	a2	a3
	мм			
А	30	20	15	12
Б	25	16	12	10
В	20	14	10	8
Г	15	12	10	8
Д	28	20	14	10
Е	24	18	14	10
Ж	18	10	8	6
З	16	12	8	6
И	22	16	12	8
К	26	20	15	10



Обозначения:

b - ширина полки;
 t - толщина полки;
 R - радиус внутреннего закругления;
 r - радиус закругления полки;
 W - момент сопротивления;
 J - момент инерции;
 i - радиус инерции;
 Z_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
 J_{xy} - центробежный момент инерции

Номер уголка	мм				Площадь по- перечного сечения, см ²	Справочные величины для осей										Масса 1 м уголка, кг	
	b	t	R	r		x - x			x ₀ - x ₀			y ₀ - y ₀			J _{xy} , см ⁴		Z ₀ , см
						J _{x₀} , см ⁴	W _{x₀} , см ³	i _{x₀} , см	J _{x₀ max} , см ⁴	i _{x₀ max} , см	J _{y₀ min} , см ⁴	W _{y₀} , см ³	i _{y₀ min} , см				
2	20	3			1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89	
		4			1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15	
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12	
		4			1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46	
		5*			2,27	1,22	0,71	0,73	1,91	0,92	0,53	0,47	0,48	0,69	0,80	1,78	
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27	
3	30	3			1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36	
		4			2,27	1,84	0,87	0,80	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78	
		5*			2,78	2,20	1,06	0,89	3,47	1,12	0,94	0,71	0,58	1,27	0,93	2,18	

номер уголка	мм				Площадь по- перечного сечения, см ²	х - х				х ₀ - х ₀				у ₀ - у ₀				J _{xy} , см ⁴	Z ₀ , см	Масса 1 м уголка, кг
	b	t	R	r		J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _{x0} max , см ⁴	i _{x0} max , см	J _{y0} min , см ⁴	W _{y0} , см ³	i _{y0} min , см							
3,2	32	3			1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46				
		4			2,43	2,26	1,0	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91				
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60				
		4			2,17	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10				
		5			3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58				
4	40	3			2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85				
		4	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	2,68	1,13	2,42							
		5	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	0,78	3,22	1,17	2,98							
		6*	4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	3,72	1,21	3,52							
4,5	45	3			2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08				
		4	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	3,89	1,26	2,73							
		5	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	4,71	1,30	3,37							
		6*	5,08	9,35	2,95	1,36	14,80	1,71	3,90	2,06	5,45	1,34	3,99							
5	50	3			2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32				
		4	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	5,42	1,38	3,05							
		5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77					
		6		5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47					
		7*		6,56	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15					
		8*		7,41	16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82					
5,6	56	4			4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44				
		5	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25						